EQUACIONS DIFERENCIALS

OT GARCÉS I ADRIÀ GARCÉS

RESUM. Basat en els apunts del curs d'Equacions Diferencials del grau de Matemàtiques de la *Universitat de Barcelona*. Aquests apunts estan organitzats de la manera següent: les seccions 1, 2, 3 i 4 exposen els teoremes fonamentals de la teoria de les equacions diferencials ordinàries, i la secció 5 és una petita introducció a la teoria qualitativa de les equacions diferencials ordinàries. Les notes són incompletes i s'aniran revisant i completant periòdicament.

ÍNDEX

1. UNICITAT LOCAL DE SOLUCIONS.

Definició 1.1. *Considerarem una EDO de primer ordre en dimensió n en la forma explícita amb unes condicions inicials*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

amb $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ obert i $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ com a mínim. A aquest problema també se li diu problema de Cauchy.

Observació 1.2. *Al cas que tractarem, tal i com s'ha pogut veure al primer laboratori de l'assignatura, cal que $f(t, x)$ sigui al menys contínua respecte (t, x). La continuïtat de $f(t, x)$ no garanteix la unicitat de les solucions, només l'existència (teorema de Peano).*

Definició 1.3. *Una solució del problema de Cauchy (1) és una funció $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ que és diferenciable a $I \subset \mathbb{R}$ tal que*

i) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$
ii) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$

Remark 1.4. *Se segueix inmediatament de la definició que si $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ és solució, aleshores φ és $\mathcal{C}^1$ respecte t.*

Per altra banda, ens interessarà estudiar o variar la condició inicial $(t_0, x_0) \in \Omega$ i veurem com canvien les solucions particulars. Veurem que això ens defineix un procés evolutiu, determinista i diferenciable.

Definició 1.5. *Definim un procés evolutiu com una aplicació contínua $\Phi : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ amb D obert i tal que*

i) $D = \{(t; t_0, x_0); (t_0, x_0) \in \Omega, t \in I(t_0, x_0)\}$
ii) Satisfà la llei de composició: $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$, $t_1 \in I(t_0, x_0)$
   – $t_0 \in I(t_0, x_0)$ *i* $\Phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$
   – $t_2 \in I(t_1, \Phi(t_1; t_0, x_0))$
iii) Φ *diferenciable respecte t, $\partial_t \Phi(t; t_0, x_0)$ contínua a D.*

Donat un procés evolutiu $\Phi(t; t_0, x_0)$ hi podem asociar un camp vectorial de velocitats

Definició 1.6. *El camp de velocitats de Φ és*

$$f \ : \ \Omega \to \mathbb{R}^n \tag{2}$$
$$(t,x) \mapsto \partial_t \Phi(t;t,x) \tag{3}$$

Es diu aleshores que el procés evolutiu $\Phi(t;t_0,x_0)$ té llei d'evolució donada per l'equació diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ definida a Ω.

Proposició 1.7. *Sigui Φ un procés evolutiu amb domini $D \subset \mathbb{R} \times \Omega$ i $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ el camp de velocitats associat, llavors $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$, $\Phi(\cdot; t_0, x_0)$ és solució del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

Demostració Prenem Φ procés evolutiu. Per tant, per definició es verifica que $\Phi(t_0;t_0,x_0) = x_0$, i $\forall t \in I(t_0,x_0)$, es verifica que

$$\partial_t \Phi(t;t,\Phi(t;t_0,x_0)) = f(t,\Phi(t;t_0,x_0)) \tag{5}$$

degut a la definició de camp de velocitats. Així doncs,

$$\begin{aligned} f(t,\Phi(t;t_0,x_0)) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\Phi(t+h;t,\Phi(t;t_0,x_0)) - \Phi(t;t,\Phi(t;t_0,x_0))\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\Phi(t+h;t_0,x_0) - \Phi(t;t_0,x_0))\right] \\ &= \partial_t \Phi(t;t_0,x_0) \end{aligned} \tag{6}$$

per la llei de composició de la definició de procés evolutiu. Per tant, $\Phi(t;t_0,x_0)$ satisfà el problema de Cauchy.

Donades aquestes definicions, podem veure quines són les condicions que determinen l'existència i unicitat de les solucions.

Teorema: Existència i unicitat local.
Sigui $(t_*,x_*) \in \Omega$. Considerarem $a,b > 0$ tal que

$$\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(t_*,x_*) = \bar{I}_a(t_*) \times \bar{B}_b(x_*) \subset \Omega \quad \text{cilindre compacte} \tag{7}$$

i el problema de Cauchy (1) definit a $\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(t_*,x_*)$. Suposarem ara que f és Lipschitz respecte a x a $\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(t_*,x_*)$ amb constant de Lipschitz $L > 0$. Sigui ara $M \in \mathbb{R}_+$ tal que $|f(t,x)| \leq M \ \forall (t,x) \in \bar{\mathcal{C}}_{a,b}(t_*,x_*)$ pel teorema de Weierstrass, i siguin ara també α, α_0, β de forma que $0 \leq \alpha \leq a$, $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha$ i $0 \leq \beta \leq b$ tal que $M(\alpha + \alpha_0) + \beta \leq b$. Aleshores, existeix una única funció contínua respecte $(t;t_0,x_0)$

$$\Phi_* : \bar{I}_\alpha(t_*) \times \bar{I}_{\alpha_0}(t_*) \times \bar{B}_\beta(x_*) \to \bar{B}_b(x_*)$$
$$(t;t_0,x_0) \mapsto \Phi_*(t;t_0,x_0) \tag{8}$$

tal que Φ_* és diferenciable respecte t i a més és solució del problema de Cauchy (1)

Demostració La demostració es basa a un argument de punt fix. Considerem l'espai de funcions

$$X = \mathcal{C}^0\left(\bar{I}_\alpha(t_*) \times \bar{I}_{\alpha_0}(t_*) \times \bar{B}_\beta(x_*), \mathbb{R}^n\right) \tag{9}$$

Per altra banda, com $\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*) = \bar{I}_\alpha(t_*) \times \bar{I}_{\alpha_0}(t_*) \times \bar{B}_\beta(x_*)$ és compacte, aleshores $(X, \|\cdot\|_\infty)$ és de Banach. Per altra banda, noti's que $L > 0$ és la constant Lipschitz de $f|_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)}$. Considerem la norma de Bielecki $\|\cdot\|_{\infty,L}$. Es pot mostrar que la norma suprem i la norma de Bielecki són equivalents, de forma que tenim que $(X, \|\cdot\|_{\infty,L})$ també és de Banach. Ara podem considerar l'espai de funcions

$$X_b = \mathcal{C}^0\left(\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*), \bar{B}_b(x_*)\right) \tag{10}$$

com $X_b \subset X$ tancat, aleshores tenim que $(X_b, \|\cdot\|_{\infty,L})$ és també de Banach. Considerem ara l'operador de Picard a l'espai mètric $(X_b, \|\cdot\|_{\infty,L})$ definit per

$$\Gamma \ : X_b \to X_b \tag{11}$$
$$\phi \mapsto \Gamma\phi \tag{12}$$

de forma que

$$\Gamma\phi(t;t_0,x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s;t_0,x_0))\,ds \tag{13}$$

Cal verificar si aquest operador està ben definit. Notem que si $\phi \in X_b$, tenim que $\Gamma\phi$ és contínua, però cal veure si $\Gamma\phi \in X_b$. Sigui $(t;t_0,x_0) \in \bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)$, alehores tenim

$$\begin{aligned}|\Gamma\phi(t;t_0,x_0) - x_*| &\le |x_0 - x_*| + \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s;t_0,x_0))|\,ds \\ &\le \beta + \int_{t_0}^{t} M\,ds \le \beta + M(\alpha+\alpha_0) \le b \end{aligned}\tag{14}$$

pel que $\Gamma\phi \in X_b$. Ara cal veure que l'operador de Picard és contractiu. Considerem $\phi,\psi \in X_b$, i veiem que

$$\begin{aligned}\|\Gamma\psi - \Gamma\phi\|_{\infty,L} &= \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} e^{-L|t-t_0|}\,|\Gamma\psi - \Gamma\phi| \\
&= \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} e^{-L|t-t_0|}\left|\int_{t_0}^{t} [f(s,\psi(s;t_0,x_0)) - f(s,\phi(s;t_0,x_0))]\,ds\right| \\
&\le \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} e^{-L|t-t_0|}\int_{t_0}^{t} |f(s,\psi(s;t_0,x_0)) - f(s,\phi(s;t_0,x_0))|\,ds \\
&\le \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} e^{-L|t-t_0|}\int_{t_0}^{t} L\,|\psi(s;t_0,x_0) - \phi(s;t_0,x_0)|\,ds \\
&= \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} e^{-L|t-t_0|}\int_{t_0}^{t} L\,|\psi(s;t_0,x_0) - \phi(s;t_0,x_0)|\,e^{-L|s-t_0|}e^{L|s-t_0|}\,ds \\
&\le \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} e^{-L|t-t_0|}L\|\psi-\phi\|_{\infty,L}\int_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0|}\,ds \\
&= \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} e^{-L|t-t_0|}L\|\psi-\phi\|_{\infty,L}\left.\frac{e^{L|s-t_0|}}{L}\right|_{t_0}^{t} \\
&= \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} e^{-L|t-t_0|}\|\psi-\phi\|_{\infty,L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) \\
&= \sup_{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_*,x_*)} \left(1 - e^{-L|t-t_0|}\right)\|\psi-\phi\|_{\infty,L} \le \underbrace{\left(1 - e^{-L(\alpha+\alpha_0)}\right)}_{<1}\|\psi-\phi\|_{\infty,L}\end{aligned}\tag{15}$$

de forma que Γ és contractiu. Per tant, pel teorema de punt fix de Banach, $\exists!$ punt fix $\phi_* \in X_b$. Ara falta veure que en efecte, aquest punt fix ϕ_* és solució del problema de Cauchy. Volem demostrar que ϕ_* és punt fix de Γ si, i només si, ϕ_* és solució del problema de Cauchy. Suposem que ϕ_* és punt fix de Γ, aleshores

$$\Gamma\phi_* = \phi_* \quad\Leftrightarrow\quad x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi_*(s;t_0,x_0))\,ds = \phi_*(t;t_0,x_0) \tag{16}$$

Veiem aleshores que

$$\begin{cases}\phi_*(t_0;t_0,x_0) & = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s,\phi_*(t_0;t_0,x_0))\,ds = x_0 \\ \partial_t\phi_*(t;t_0,x_0) & = f(t,\phi_*(t;t_0,x_0))\end{cases}\tag{17}$$

pel que aleshores ϕ_* és solució del problema de Cauchy. Ara demostrem a la direcció inversa. Suposem que ϕ_* és solució del problema de Cauchy. Aleshores,

$$\partial_t\phi_*(t;t_0,x_0) = f(t,\phi_*(t;t_0,x_0)) \tag{18}$$

si ara integrem a ambdues bandes, veiem que

$$\int_{t_0}^{t} \partial_s\phi_*(s;t_0,x_0)\,ds = \phi_*(t;t_0,x_0) - \phi_*(t_0;t_0,x_0) = \int_{t_0}^{t} f(s,\phi_*(s;t_0,x_0))\,ds \tag{19}$$

pel que

$$\phi_*(t;t_0,x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi_*(s;t_0,x_0))\,ds \tag{20}$$

i per tant ϕ_* és punt fix de X_b.

Corol·lari 1.8. *Sota les hipòtesis del Teorema d'Existència i Unicitat local, si prenem*

$$\alpha := \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \tag{21}$$

aleshores $\exists!$ *funció* $\varphi : \bar{I}_\alpha(t_*) \to \bar{B}_b(x_*)$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *respecte* t *tal que és solució del problema de Cauchy.*

Demostració Se segueix inmediatament del teorema anterior imposant $\alpha_0 = 0$, $\beta = 0$ (pel que prenem només una condició inicial) i definit

$$\alpha := \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \tag{22}$$

Proposició 1.9. *Es té que* f *és localment Lipschitz respecte* x *si, i només sí,* f *és Lipschitz en compactes. Això implica que ambdues afirmacions són equivalents.*

Demostració No ho demostro als punts perquè la proposició no té a veure amb l'objectiu principal del curs.

2. Prolongació de les solcuions respecte $(t;t_0,x_0)$.

Suposem que tenim un problema de Cauchy (1). Suposem també que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua i localment Lipschitz respecte x. Ara, $\forall (t_0,x_0) \in \Omega$, volem provar el següent enunciat.

Proposició 2.1. *Siguin* $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ *i* $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ *dues solucions del problema de Cauchy* (1) *amb* $I_1 \neq I_2$. *Volem veure que* $\forall t \in I_1 \cap I_2$ *es té que* $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.

Demostració Sigui $\tilde{t} := \inf\{t \geq t_0 \text{ t.q } t \in I_1 \cap I_2,\ \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}$ el temps mínim al que les solucions comencen a diferir. A $\tilde{t}$ es té que $\varphi_1(\tilde{t}) = \varphi_2(\tilde{t})$ i anomenarem

$$\varphi(\tilde{t}) := \varphi_1(\tilde{t}) = \varphi_2(\tilde{t}) \tag{23}$$

llavors $\forall t \in [t_0,\tilde{t}]$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. D'altra banda, $(\tilde{t},\varphi(\tilde{t})) \in \Omega$ obert, per tant $\exists\, a,b \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(\tilde{t},\varphi(\tilde{t})) \subset \Omega$ compacte i f és Liftschitz respecte a x a $\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(\tilde{t},\varphi(\tilde{t}))$ compacte. Ara, sigui $M := \max_{\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(\tilde{t},\varphi(\tilde{t}))} |f(t,x)|$. Notem per altra banda que

$$\lim_{t\to\tilde{t}} \varphi_1(t) = \varphi(\tilde{t}) \tag{24}$$

$$\lim_{t\to\tilde{t}} \varphi_2(t) = \varphi(\tilde{t}) \tag{25}$$

i per tant també $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que $|\varphi_1(t) - \varphi(\tilde{t})| \leq b$ quan $|t - \tilde{t}| < \alpha$. Suposem a més que $\alpha M \leq b$ (altrament el podem triar més petit). El **teorema de Picard** implica que $\exists! \varphi : \bar{I}_\alpha(\tilde{t}) \to \bar{B}_b(\varphi(\tilde{t}))$ solució del problema de Cauchy

$$\varphi_1\big|_{\bar{I}_{\alpha,1}(\tilde{t})} = \varphi_2\big|_{\bar{I}_{\alpha,2}(\tilde{t})} =: \varphi(t) \tag{26}$$

pel que trobem una contradicció.

Ara volem estudiar l'existència i unicitat de les solucions maximals, per tal de veure fins on és possible prolongar les solucions del problema de Cauchy (1).

Suposem que tenim de nou el problema de Cauchy (1) amb $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, amb $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ obert, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ i Lipschitz respecte x a Ω. Sigui ara ψ la solució $\psi : I_\psi \to \mathbb{R}^n$ del problema de Cauchy i considerem la família de solucions $\{\psi, I_\psi\}_\psi$.

Theorem 2.2. $\exists!$ *solució* $\varphi : I_M \to \mathbb{R}^n$, $I_M \subset \mathbb{R}$ *obert, del problema de Cauchy* (1) *tal que* $\forall \psi \in \{\psi, I_\psi\}_\psi$ *família de solucions:*

i) $I_\psi \subset I_M$
ii) $\psi = \varphi\big|_{I_\psi}$

on φ és la solució maximal del problema de Cauchy i I_M és l'interval maximal on es pot definir una solució del problema de Cauchy.

Remark 2.3. *Per notació, denotarem $I_M := (t_-, t_+)$. En el cas més general, tindrem inclús que $-\infty < t_- < t_+ < \infty$.*

Demostració Considerem $I_M = \cup_{\psi \text{ sol.}} I_\psi$. Donat $t \in I_M$, aleshores $\exists\, I_\psi$ tal que $t \in I_\psi$ i per tant $\varphi(t) := \psi(t)$, el que està ben definit per unicitat d'existència global. Ens queda veure que I_M és obert. Suposem que I_M tancat, per exemple $I_M := (t_-, t_+]$. Aleshores, tenim que $(t_+, \varphi(t_+)) \in \Omega$ i podríem construir una solució que prolongui φ per la dreta de t_+, prenent la parella $(t_+, \varphi(t_+))$ com a condició inicial, pel que φ ja no seria maximal i ens contradiem. Això implica que I_M ha de ser obert.
Ara que sabem que les solucions es poden definir un interval maximal, volem estudiar quin és el comportament de les solucions a la frontera. De fet, volem estudiar-ne el comportament de la solució maximal a la frontera de I_M.

Teorema: d'Aproximació a la frontera.
Si considerem el problema de Cauchy (1), del teorema d'existència de la solució maximal tenim que $\exists!\, \varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ solució maximal. Aquesta solució maximal verifica que quan $t \to t_+$ aleshores $(t, \varphi(t; t_0, x_0)) \to \partial\Omega$, i.e $\forall \mathscr{K} \subset \Omega$ compacte, $\exists$ una succesió $\{t_n\}_n$ tal que $\{t_n\}_n$ creixent cap a t_+ i tal que per n prou gran, $(t_n, \varphi(t_n; t_0, x_0)) \notin \mathscr{K}$. Diem aleshores que la solució escapa del compacte $\mathscr{K}$.

Observació 2.4. *Equivalentment podem dir que $\forall \mathscr{K} \subset \Omega$ compacte, $\exists [t^-_{\mathscr{K}}, t^+_{\mathscr{K}}] \subset (t_-, t_+)$ tal que $\forall t \in (t_-, t_+) \setminus [t^-_{\mathscr{K}}, t^+_{\mathscr{K}}]$ tenim que $(t, \varphi(t)) \notin \mathscr{K}$.*

Demostració Si $t_+ \to \infty$, el resultat és obvi. Suposem que $t_+ < \infty$ i que $\exists \mathscr{K} \subset \Omega$ compacte tal que la solució no escapa de $\mathscr{K}$. Considerem la successió creixent $\{t_n\}_n$ cap a t_+, aleshores la successió $\{t_n, \varphi(t_n; t_0, x_0)\}_n \in \mathscr{K}\ \forall n$. Com la sucessió està a un compacte, ha de ser acotada. El **teorema de Bolzano - Weierstrass** implica que $\exists$ una successió parcial convergent a un punt de $\mathscr{K}$, i.e $(t_{\tilde{n}}, \varphi(t_{\tilde{n}}; t_0, x_0)) \to (t_+, x_+) \in \mathscr{K}$. Ara triem $a, b > 0$ suficientment petits tal que $\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(t_+, x_+) \subset \Omega$ i tal que f sigui Lipschitz respecte x a $\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(t_+, x_+)$, tot definint $M := \max_{\bar{\mathcal{C}}_{a,b}(t_+,x_+)} |f(t,x)|$ i α, α_0, β tal que $0 < \alpha = \alpha_0 < a$ i $\beta > 0$ i tals que $2\alpha M + \beta \le b$. Apliquem el **teorema fonamental** i veiem que aleshores $\exists!\, \varphi_+ : \bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha_0,\beta}(t_+, x_+) \to \bar{B}_b(x_+)$ tal que φ_+ és la solució del problema de Cacuhy. Aleshores, $\exists n_0 \ge 0$ tal que si $n \ge n_0$ aleshores $(t_n, \varphi_+(t_n; t_+, x_+)) \in \bar{\mathcal{C}}_{a,b}(t_+, x_+)$ perque φ_+ és contínua. Per tant, tinc la solució definida per $t > t_+$ i contradiem el fet que solució era maximal i el teorema d'unicitat global. Així doncs, tenim el resultat.

Remark 2.5. *En general la solució no tendeix a un punt de la frontera $\partial\Omega$.*

Exemple 2.6. *Un exemple molt clar d'aquest fet és el següent problema de Cauchy.*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{27}$$

Notem que en aquest cas podem prendre $\Omega := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Per altra banda, l'equació diferencial és de variables separades, i per tant la podem integrar.

$$x(t) = \int \left(-\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}\right)\, dt = \sin\frac{1}{t} + C, \quad C \in \mathbb{R} \tag{28}$$

Per $t \to 0$, la solució s'acumula a la banda $[C+1, C-1]$, i la solució escapa de tot compacte $\mathscr{K} \subset \Omega$ que puguem consturir, ja que s'escapa pel temps.

3. Dependència contínua i diferenciabilitat.

Hi ha teoremes més potents que ens permeten demostrar premises com que si $f \in \mathcal{C}^r(\Omega)$ aleshores $\Phi \in \mathcal{C}^r$ amb $r \ge 1$ o bé que sí f analítica, aleshores Φ analítica. Nosaltres ens preguntarem en general com es comporta la distància entre solucions donades dos condicions incials al mateix temps però amb condició incial diferent, la continuïtat i diferenciabilitat respecte paràmetres, respecte condicions inicials, etc. Un cas concret serà sobre la dependència Lipschitz de Φ sota hipòtesis de Picard, continuïtat Lipschitz respecte de les condicions inicials i paràmetres, entre d'altres.

Lema 3.1. de Gronwall *Sigui $I := [a,b]$. Siguin també $u, v : I \to \mathbb{R}_+$. Si es verifica que*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)\, ds \tag{29}$$

$\forall t \in [a,b]$ i $\alpha \geq 0$, aleshores es té que

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t v(s)\, ds\right) \tag{30}$$

Demostració Hem de distinguir dos casos, $\alpha > 0$ i $\alpha = 0$. Primer de tot, suposem que

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)\, ds := w(t) \tag{31}$$

- Suposem que $\alpha > 0$. Aleshores $w(a) = \alpha > 0$, i com

$$w'(t) = v(t)u(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \tag{32}$$

aleshores tenim que $w(t) \geq \alpha\ \forall t \in [a,b]$. Ara bé, per definició, tenim que

$$w'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)w(t) \tag{33}$$

pel que tenim que

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^t \frac{w'(s)}{w(s)}\, ds \leq \int_a^t v(s)\, ds \quad \Leftrightarrow \quad \ln w(t) - \ln w(a) \leq \int_a^t v(s)\, ds \tag{34}$$

però com $w(a) = \alpha > 0$ aleshores tenim

$$\ln w(t) \leq \ln \alpha + \int_a^t v(s)\, ds \quad \Leftrightarrow \quad w(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t v(s)\, ds\right) \tag{35}$$

però recordem que $u(t) \leq w(t)$, pel que

$$u(t) \leq w(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t v(s)\, ds\right) \tag{36}$$

- Suposem ara que $\alpha = 0$. Aleshores, tenim

$$u(t) \leq \int_a^t v(s)u(s)\, ds \leq \beta + \int_a^t v(s)u(s)\, ds \quad \forall \beta \geq 0 \tag{37}$$

i tenim un cas idèntic a l'anterior, pel que

$$u(t) \leq \beta \exp\left(\int_a^t v(s)\, ds\right) \quad \forall \beta \geq 0 \tag{38}$$

Lema 3.2. *Sigui (1) el problema de Cauchy, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua i localment Lipschitz respecte x amb constant $L > 0$. Siguin $(t_0, x_0) \in \Omega$ i $(t_0, y_0) \in \Omega$. Sigui també $t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, y_0)$, aleshores*

$$|\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_0, y_0)| \leq |x_0 - y_0| \exp\left(L|t - t_0|\right) \tag{39}$$

Demostració Per una banda tenim

$$\begin{aligned}
|\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_0, y_0)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Phi(s; t_0, x_0))\, ds - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, \Phi(s; t_0, y_0))\, ds \right| \\
&\leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t \left[f(s, \Phi(s; t_0, x_0)) - f(s, \Phi(s; t_0, y_0)) \right] ds \right| \\
&\leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t \left| f(s, \Phi(s; t_0, x_0)) - f(s, \Phi(s; t_0, y_0)) \right| ds \\
&\leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t L \left| \Phi(s; t_0, x_0) - \Phi(s; t_0, y_0) \right| ds
\end{aligned} \tag{40}$$

I aplicant el lema de Gronwall, es té que

$$|\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_0, y_0)| \leq |x_0 - y_0| \exp\left(L|t - t_0|\right) \tag{41}$$

Tenim doncs que el lema de Gronwall ens diu que si f és localment Lipschitz respecte x, aleshores Φ és Lipschitz respecte x_0, amb constant Lipschitz $e^{L|t-t_0|}$.

Remark 3.3. *La continuitat Lipschitz respecte x_0 no és uniforme en t, depèn de t, de fet, augmenta com a $\sim e^{L|t-t_0|}$. El resultat no és massa visual, ja que ens diu que la distància entre dues condicions inicials va com un exponencial. No es pot en general refinar aquesta cota, i és una cota superior bastant gran.*

Exemple 3.4. *Si considerem el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} & = -2y \\ \dot{y} & = 2x \end{cases} \tag{42}$$

amb condicions inixials $(x(0), y(0)) = (A, 0)$, tenim que resolent el problema de Cauchy per $(x(0), y(0)) = (B, 0)$, la cota superior de la distància entre solucions és

$$|\varphi(t; 0, A, 0) - \varphi(t; 0, B, 0)| \leq |A - B| \tag{43}$$

mentre que el lema de Gronwall ens diu que

$$|\varphi(t; 0, A, 0) - \varphi(t; 0, B, 0)| \leq |A - B|e^{2|t|} \tag{44}$$

pel que veiem que la cota superior donada pel lema de Gronwall no ens dona una informació 'realista' sobre el comportament, dona una cota molt gran.

Theorem 3.5. *Suposem al problema de Cauchy (1) que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua i localment Lipschitz respecte x. Sigui $\Phi(t; t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$ la solució del problema de Cauchy. Definim*

$$\begin{aligned} \Phi : D &\to \mathbb{R}^n \\ (t; t_0, x_0) &\mapsto \Phi(t; t_0, x_0) \end{aligned} \tag{45}$$

amb $D = \{(t; t_0, x_0) | t \in I(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in \Omega\}$. Llavors Φ és un procés evolutiu amb domini D i llei d'evolució $\partial_t \Phi(t; t_0, x_0) = f(t, \Phi(t; t_0, x_0))$. A més Φ és localment Lipschitz respecte $(t; t_0, x_0)$ i $\partial_t \Phi(t; t_0, x_0)$ és localment Lipschitz respecte (t_0, x_0).

Demostració Com $\Phi(t; t_0, x_0)$ és procés evolutiu, només cal demostrar que D és un obert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i que $\Phi(t; t_0, x_0)$ és contínua i localment Lipschitz, i que $\partial_t \Phi(t; t_0, x_0)$ és localment Lipschitz respecte condicions inicials. Per fer-ho farem servir diferents lemes.

Lema 3.6. *Donats $(t_*, x_*) \in \Omega$ i $[a_1, a_2] \subset I(t_*, x_*)$. Sigui $r > 0$ suficientment petit tal que $\bar{\Delta}_r := \{(t, x)$ tal que $t \in [a_1, a_2], |x - \Phi(t; t_*, x_*)| \leq r\} \subset \Omega$. Aleshores $\exists\, \rho > 0$ tal que $\forall\, (t_0, x_0) \in \bar{\Delta}_\rho$ tenim que $[a_1, a_2] \subset I(t_0, x_0)$ i $\forall t \in [a_1, a_2]$, $|\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_*, x_*)| \leq r$, és a dir, que $(t, \Phi(t; t_0, x_0)) \in \Omega$.*

Demostració Considerem $0 < \rho < r$ que ja triarem. Donat $(t_0, x_0) \in \bar{\Delta}_\rho$, sigui $[t_-^r, t_+^r] = I_{\bar{\Delta}_r}(t_0, x_0)$ l'interval de t en què el gràfic de la solució del problema de Cauchy (t_0, x_0) està a $\bar{\Delta}_r$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} \partial \bar{\Delta}_r = \{(a_i, x)\ i = 1, 2, \text{ tal que } |x - \Phi(a_i; t_*, x_*)| \leq r\} \\ \cup \{(t, x),\ t \in [a_1, a_2],\ |x - \Phi(t; t_*, x_*)| = r\} \end{aligned} \tag{46}$$

pel que les solucions escapen per x. Per altra banda, f és localment Lipschitz si i només sí és Lipschitz en compactes, pel que f és Lipschitz a $\bar{\Delta}_r$. Sigui L la constant Lipschitz de $f|_{\bar{\Delta}_r}$, aleshores, $\forall t \in [t_-^r, t_+^r]$

$$\begin{aligned} |\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_*, x_*)| &= |\Phi(t; t_0, x_0) - x_0 + x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*) + \Phi(t_0; t_*, x_*) - \Phi(t; t_*, x_*)| \\ &\leq |x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*)| + |\Phi(t; t_0, x_0) - x_0 + \Phi(t_0; t_*, x_*) - \Phi(t; t_*, x_*)| \\ &\leq |x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*)| + \int_{t_0}^t |f(s, \Phi(s; t_0, x_0)) - f(s, \Phi(s; t_*, x_*))|\, ds \\ &\leq |x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*)| + \int_{t_0}^t L|\Phi(s; t_0, x_0) - \Phi(s; t_*, x_*)|\, ds \end{aligned} \tag{47}$$

i fent servir el lema de Gronwall, trobem

$$\begin{aligned} |\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_*, x_*)| &\leq |x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*)| \exp(L|t - t_0|) \\ &\leq |x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*)| e^{L|a_2 - a_1|} \\ &\leq e^{L|a_2 - a_1|} \rho < r \end{aligned} \tag{48}$$

si prenem $\rho < e^{-L|a_2 - a_1|} r$ amb $t_-^r = a_1$, $t_+^r = a_2$.

Del lema anterior es conclou que $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és obert. Considerem $(t; t_*, x_*) \in D$. Siguin $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $[a_1, a_2] \subset I(t_*, x_*)$ obert i tals que $t, t_* \in (a_1, a_2)$, el lema aplicat a $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_r$ ho demostra. $\square$
Encara queda per demostrar que $\Phi(t; t_0, x_0)$ i que $\partial_t \Phi(t; t_0, x_0)$ són localment Lipschitz.

Lema 3.7. *Sota les hipòtesis del lema anterior, donat $(t_*, x_*) \in \Omega$, $[a_1, a_2] \subset I(t_*, x_*)$ i $r > 0$ suficientment petit per tal que $\bar{\Delta}_r \subset \Omega$, aleshores $\exists\, \rho > 0$ tal que per $t \in [a_1, a_2]$ i $(t_0, x_0) \in \bar{\Delta}_\rho$, tenim que $(t, \Phi(t; t_0, x_0)) \in \bar{\Delta}_r$. Tenim que*

i) $\Phi(t; t_0, x_0)$ és Lipschitz a $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$ respecte $(t; t_0, x_0)$.
ii) $\partial_t \Phi(t; t_0, x_0)$ és Lipschitz a $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$ respecte (t_0, x_0).

Demostració Sigui $M := \max_{(t,x) \in \bar{\Delta}_r} |f(t, x)|$. Considerem $(t_1'; t_0', x_0'), (t_1; t_0, x_0) \in [a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$. Aplicant la llei de composició del procés evolutiu $\Phi(t; t_0, x_0)$ trobem que

$$\begin{aligned} |\Phi(t_1'; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| &= |\Phi(t_1'; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0', x_0') + \Phi(t_1; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| \\ &\leq |\Phi(t_1'; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0', x_0')| + |\Phi(t_1; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| \end{aligned} \tag{49}$$

Calculem cotes d'aquests dos termes per separat.

$$|\Phi(t_1'; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0', x_0')| = \left| \int_{t_1}^{t_1'} f(s, \Phi(s; t_0', x_0'))\, ds \right| \leq M|t_1' - t_1| \tag{50}$$

per l'altra banda

$$\begin{aligned} |\Phi(t_1; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| &\leq e^{L|t_1 - t_0'|} |x_0' - \Phi(t_0'; t_0, x_0)| \\ &\leq e^{L|a_2 - a_1|} \left(|x_0' - x_0| + |x_0 - \Phi(t_0'; t_0, x_0)| \right) \\ &\leq e^{L|a_2 - a_1|} \left(|x_0' - x_0| + M|t_0' - t_0| \right) \end{aligned} \tag{51}$$

a la primera desigualtat s'ha omès el càlcul ja que és anàleg al fet al lema anterior. Trobem, per tant, que

$$|\Phi(t_1'; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| \leq M|t_1' - t_1| + e^{L|a_2 - a_1|}|x_0' - x_0| + Me^{L|a_2 - a_1|}|t_0' - t_0| \tag{52}$$

de forma que $\Phi(t; t_0, x_0)$ és Lipschitz respecte tot. Ara ho veurem què satisfà $\partial_t \Phi(t; t_0, x_0)$. En efecte, tenim que

$$\begin{aligned} |\partial_t \Phi(t; t_0', x_0') - \partial_t \Phi(t; t_0, x_0)| &= |f(t, \Phi(t; t_0', x_0')) - f(t, \Phi(t; t_0, x_0))| \\ &\leq L|\Phi(t; t_0', x_0') - \Phi(t; t_0, x_0)| \\ &\leq Le^{L|a_2 - a_1|} \left(|x_0' - x_0| + M|t_0' - t_0| \right) \end{aligned} \tag{53}$$

on hem fet servir (51). Així doncs, tenim que $\partial_t \Phi(t; t_0, x_0)$ és Lipschitz respecte $(t_0, x_0) \in \Omega$. $\square$

4. Diferenciabilitat de solucions.

Ara hom pot fer-se preguntes sobre quines són les condicions de diferenciabilitat sobre els processos evolutius en què podem treballar. Si és $f \in \mathcal{C}^r$, és aleshores $\Phi \in \mathcal{C}^r$? Si f és analítica, és aleshores Φ analítica? Quines són les condicions de derivabilitat respecte les condicions inicials i paràmetres?

Theorem 4.1. *Sigui (1) un problema de Cauchy. Sigui $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, i $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Això garantitza que f sigui contínua i localment Lipschitz respecte x (per tant queda garantitzada l'existència i unicitat de solucions). Sigui $\Phi : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el procés evolutiu associat. Aleshores, Φ és $\mathcal{C}^1$ respecte $(t; t_0, x_0)$ i a més, sigui la matriu principal fonamental*

$$M(t; t_0, x_0) := \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) = \mathrm{D}x_0 \Phi(t; t_0, x_0) \tag{54}$$

aleshores M satisfà

$$\begin{cases} \partial_t M(t; t_0, x_0) &= \mathrm{D}_x f(t, \Phi(t; t_0, x_0)) M(t; t_0, x_0) \\ M(t_0; t_0, x_0) &= \mathbb{1} \end{cases} \tag{55}$$

i el sistema anterior rep el nom de equació de la 1ª variacional respecte x_0.

Teorema: Fòrmula de Liouville.
Sigui $M(t)$ una matriu amb columnes solució del l'equació diferencial ordinaria $n \times n$ dimensional $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, de la forma

$$\begin{aligned} M : I &\to \mathscr{M}_{n\times n} \\ t &\mapsto M(t) \in \mathscr{M}_{n\times n} \end{aligned} \tag{56}$$

amb $I \subset \mathbb{R}$ obert i $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathscr{M}_{n\times n})$. Aleshores, $\forall t, t_0 \in I$, es verifica

$$\det M(t) = \det M(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(s)\, ds\right) \tag{57}$$

Demostració Definim $\varphi(t) := \det M(t)$ i veiem que $\varphi(t)$ és solució de l'equació diferencial

$$\dot{\varphi} = \mathrm{tr}A(t)\varphi(t) \tag{58}$$

En efecte, per definició es té que

$$\varphi(t) := \det\left(M_1(t), M_2(t), \dots, M_n(t)\right) \tag{59}$$

on les M_i, $\forall i, 1 \leq i \leq n$ són les solucions de l'equació diferencial ordinaria que considerem. Així doncs, tindrem també que

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \det\left(M_1(t), \dots, M_i'(t), \dots, M_n(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \det\left(M_1(t), \dots, A(t)M_i(t), \dots, M_n(t)\right) \tag{60}$$

on hem considerat que $M(t)$ és matriu fonamental. A més, podem esciure

$$A(t)M_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)M_j(t) \tag{61}$$

a la base de solucions de l'equació diferencial ordinaria lineal. Per tant, $\alpha_{ij}(t)$ és la matriu de l'aplicació lineal

$$x \to A(t)x \tag{62}$$

a la base $\{M_1, \dots, M_n\}$ de l'espai de solucions. No obstant, sabem que la traça és un invariant de base, i per tant no depèn de la base de forma que

$$\mathrm{tr}A(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj}(t) \tag{63}$$

equival a calular-la tant a l'espai on tenim definida la llei d'evolució com a l'espai de les solcuions. Per tant, tenim

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \det\left(M_1(t), \dots, A(t)M_i(t), \dots, M_n(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \det\left(M_1(t), \dots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)M_j, \dots, M_n(t)\right) \tag{64}$$

Notem ara que per $i \neq j$ el determinant s'anul·la i per tant ens queda

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \det\left(M_1(t), \dots, \alpha_{ii}(t)M_i, \dots, M_n(t)\right) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}(t) \det\left(M_1(t), \dots, M_i(t), \dots, M_n(t)\right) \\ &= \mathrm{tr}A(t)\varphi(t) \end{aligned} \tag{65}$$

Així, veiem que tenim

$$\dot{\varphi}(t) = \mathrm{tr}A(t)\varphi(t) \tag{66}$$

el resultat buscat se segueix de forma inmediata integrant l'anterior equació diferencial.

5. Teoria qualitativa d'equacions diferencials ordinàries

Un recordatori previ a la introducció del temari del segon bloc del curs, sigui $\dot{x} = f(t, x)$. Es pot sempre reduir a una EDO autònoma (sense paràmetres) de la forma $\dot{x} = X(x)$, on es coneix $X(x)$ com a camp vectorial. Així doncs,

Definició: Camp de classe $\mathcal{C}^r$
Un camp de classe $\mathcal{C}^r$ és una aplicació

$$X : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ obert}, \ X \in \mathcal{C}^r(\mathcal{U}), \ r \geq 1 \tag{67}$$

Un camp d'aquestes característiques indueix una EDO autònoma $\dot{x} = X(x)$ definida a $\Omega = I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ obert. Considerem el problema de Cauchy $\dot{x} = X(x)$, $x(0) = x_0$, on s'ha pres $t_0 = 0$, i denotem

$$\varphi(t, x_0) := \varphi_t(x_0) = \phi(t; 0, x_0) \tag{68}$$

Remark 5.1. *Històricament primer el problema consistia en resoldre les equacions diferencials. D'això s'en diu teoria quantitativa clàssica, que en buscava solucions si n'existien, a través dels teoremes mencionats a la primera part, mitjançant quadratura, mitjançant sèrie de potències...*

El fet que les sèrie de potències no totes les sèries poden convergir 'enlloc' va ser una motivació per enfocar el problema d'una forma diferent, la teoria qualitativa, introduïda per Poincaré. Aquesta s'interesa per la geometria (a l'espai de fase) de les solucions.

Avui dia els ordinadors són de gran ajuda per estudiar la geometria de les solucions, mitjançant el càlcul numèric.

De fet per $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t : \{x_0 \in \mathcal{U} |\ t \in I(x_0) := I(0, x_0) \to \mathbb{R}^n\}$, que donat x_0 retorna $\varphi_t(x_0) := \varphi(t, x_0)$, és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^r$ (com ja vam veure). El conjunt $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ és un grup (local), uniparamètric de transformacions, amb l'operació *composició*. Això vol dir que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ i que $\varphi_0 = \mathbb{I}_d$.

Observació 5.2. *Es té que* $\varphi : D = \{(t, x) |\ x \in \mathcal{U}, \ t \in I(x_0)\} \to \mathbb{R}^n$ *és el procés evolutiu.*

5.1. Classificació d'òrbites (corbes de fase).
Donat $x \in \mathcal{U}$, es defineix l'òbrita $\theta(x) = \{\varphi_t(x) |\ t \in I(x_0)\}$. **Dibuix**.

Uns petits comentaris sobre les òrbites o corbes de fase:

i) Sigui $y \in \mathcal{U}$. Llavors $y \in \theta(x) \iff \theta(y) = \theta(x)$. La relació $y \sim x \iff y \in \theta(x)$ és d'equivalència.
ii) Aquesta relació d'equivalència indueix una partició. El conjunt $\mathcal{U}$ i la partició en òrbites que indueix la relació d'equivalència anterior és, per definició, el **retrat de fase**.

Exemple 5.3. *Si tenim el sistem d'equacions diferencials*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases} \tag{69}$$

i podem trobar sempre $y(x)$ (teorema de la funció implícita) aleshores tenim que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \tag{70}$$

és l'equació de les òrbites. Per altra banda, si l'equació de les òrbites admet un factor integrant, aleshores les corbes solució estàn sobre $U(x, y)$ =ctt.

iii) Sobre una òrbita, tenim la relació d'ordre: si $x \sim y$, $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(t, x) = y$ per un $t \in I_+(x)$. **Dibuix**

5.2. Teorma de classificació d'òrbites.

Teorema: Classificació d'òrbites.
En les condicions anteriors, $\forall\, x \in \mathcal{U}$, $\theta(x)$ és homeomorfa a

i) 1 punt fix ($I(x) = \mathbb{R}$ ja que ens podem quedar a un punt fix i extendre la solució $\forall\, t \in \mathbb{R}$), ó
ii) $\mathcal{S}^1$ una esfera ($I(x) = \mathbb{R}$ per raons similars, $\theta(x)$ és periòdica), ó

iii) $\mathbb{R}$ (no torna mai, $\theta(x)$ és la imatge d'un interval de $\mathbb{R}$ per l'aplicació φ, que és injectiva). **Dibuix**

Demostració Sigui $x \in \mathcal{U}$ el punt inicial, o condició inicial, fixat. Considerem el conjunt $\mathcal{G} = \{t \in I(x) | \varphi_t(x) = x\}$. Es troben diferents casos:

i) Suposem que $\varphi_t(x)$ com a funció de t, amb x fixat, és injectiva. Així doncs, $\mathcal{G} = \{\emptyset\}$. A més, φ_t és un homeomorfisme amb la seva imatge, és a dir, $\{\varphi_t(x) \mid t \in I(x)\} \underset{\varphi}{\cong} I(x) \cong \mathbb{R}$, cas iii).

ii) Falten ara diferenciar dos casos diferents. Suposarem a ambdós que $\mathcal{G} \neq \{\emptyset\}$.
- Suposem que $\mathcal{G} = \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ \ \varphi_t(x) = x$. Però aleshores

$$\partial_t \varphi_t(x) = 0 = X(\varphi_t(x)) \tag{71}$$

I per tant x és un zero de X, un punt fix de $\dot{x} = X(x)$ o punt d'equilibri.
- Suposem ara que $\mathcal{G} \neq \mathbb{R}$. Fem ara aleshores un recordatori de teoria de grups:
  1) $\mathcal{G}$ és un subgrup de $\mathbb{R}$ respecte la suma.
  Demostració Volem mostrar que $t_1, t_2 \in \mathcal{G} \ \Rightarrow\ t_1 + t_2 \in \mathcal{G}$. Per definició, sabem que

$$\varphi_{t_1+t_2}(x) = (\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2})(x) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) = \varphi_{t_1}(x) = x \tag{72}$$

pel que $t_1 + t_2 \in \mathcal{G}$.
  2) $\mathcal{G}$ és tancat per successions a $\mathbb{R}$.
  Demostració Tota successió convergent a $\mathbb{R}$ és de Cauchy. Considerem $\{t_j\}_{j\geq 1}$ una successió de Cauchy d'elements de $\mathcal{G}$. Volem mostrar que aleshores

$$\lim_{j\to\infty} t_j = t_* \in \mathcal{G} \tag{73}$$

Sigui t_* el límit de la successió. Notem que per continuitat de $\varphi_t(x)$, tenim

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{t_j}(x) = \varphi_{t_*}(x) \tag{74}$$

Per altra banda, es té també que $\varphi_{t_j}(x) = x$, $\forall t_j \in \mathcal{G}$, de forma que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{t_j}(x) = \lim_{j\to\infty} x = x \tag{75}$$

Així doncs, de les dues equacions anteriors, resulta que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{t_j}(x) = \varphi_{t_*}(x) = x \tag{76}$$

pel que $t_* \in \mathcal{G}$.

Així doncs, $\mathcal{G}$ és un subgrup tancat (no trivial) de $\mathbb{R}$ que és diferent de $\mathbb{R}$.

Lemma 5.4. *Un grup tancant, no trivial, d'$\mathbb{R}$ respecte la suma, diferent d'$\mathbb{R}$, és de la forma,*

$$\gamma = \{nT \mid n \in \mathbb{Z},\ T > 0\}. \tag{77}$$

Pel lema anterior, $\exists\, T > 0$ tals que $\varphi(T, x) = x,\ \varphi(t, x) \neq x\ \forall\, t \in (0, T)$. De forma que $\theta(x)$ és homeomorfa a $[0, T]$. Com que $\varphi(T, x) = x$ l'òrbita és periòdica, i, per tant, $\theta(x) \in S^1,\ \varphi(t, x) = \varphi(t + T, x)\, \forall t$ i, per tant, com ja suposàvem, $I(x) = \mathbb{R}$.

Falta demostrar el lema anterior:

Demostració Considerem $\mathcal{G}_+ = \{t \in \mathcal{G} \mid t > 0\}$. Sigui $\tau := \inf \mathcal{G}_+$, el més petit dels $t \in \mathcal{G}_+$. Es poden distinguir 2 casos:

i) $\tau = 0 \Rightarrow \mathcal{G} = \mathbb{R}$: en efecte, $\exists$ successió d'elements de $\mathcal{G}_+$ que tendeixen a $\tau = 0$, $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \hat{t} \in \mathcal{G}_+$ tals que $0 < \hat{t} < \epsilon \to \{n\hat{t} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{G}$. Donat $z \in \mathbb{R}_+$ i $\delta > 0$, $\exists\, \epsilon = \epsilon(\delta)$ tals que $\exists\, \hat{t} = \hat{t}(\epsilon) \in \mathcal{G}_+$, $0 < \hat{t} < \epsilon$ i $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tals que $|z - m\hat{t}| < \delta$, de forma que $\mathcal{G}$ és dens i tancat $\Rightarrow \mathcal{G} = \mathbb{R}$.

ii) $0 < \tau < \infty \Rightarrow \mathcal{G} = \{nT \mid \dots\}$: en efecte, $\exists$ successió de $\mathcal{G}_+$ que tendeix a τ, $\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}$. Així doncs, $\tau \in \mathcal{G} \Rightarrow \{n\tau \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{G}$. Suposem que $\exists\, s \in \mathcal{G}$ tals que $s \neq n\tau$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Llavors $s = m\tau + \tilde{s}$, $\tilde{s} \in (0, T)$, $\tilde{s} \in \mathcal{G}$, per una cert $m \in \mathbb{Z}$. Però això no pot ser, ja que $\tau := \inf \mathcal{G}_+$ i $0 < \tilde{s} < \tau$.

El cas $\tau \to \infty$ és trivial i no cau dintre de la demostració ja que llavors $\mathcal{G} = \{0\}$ és un grup trivial.

5.3. **Punts fixos / punts regulars.** Donada l'equació autònoma $\dot{x} = X(x)$,

Definició: Punts fixos i regulars

El punt $x = x_*$ és un punt fix si $X(x_*) = 0$, és a dir, si el camp s'anul·la. Un punt fix també s'anomena punt crític (en el sentit en que la derivada s'anul·la $\dot{x} = X(x_*) = 0$) i també se li diu punt singular (perquè és una singularitat del camp de vectors $X(x)$).

El punt $x = x_r$ és un punt regular si $X(x_r) \neq 0$, en contraposició al punt singular, on la derivada no és nul·la.

Es poden distingir diferents tipus de punts fixos.

i) x_* és un punt fix hiperbòlic si $\text{Re}(\lambda) \neq 0$, $\forall\, \lambda \in \text{Spec}(DX(x_*))$. Poden ser de sella, node o flexió. **Dibuixos**.
ii) x_* és un punt fix el·líptic si $\text{Re}(\lambda) = 0$, $\text{Im}(\lambda \neq 0)$, $\forall\, \lambda \in \text{Spec}(DX_(x))$.
iii) x_* és un punt parabòlic si $\exists\, \lambda \in \text{Spec}(DX(x))$ tals que $\lambda = 0$.

Els dos últims també es coneixen com no$-$hiperbòlics. En aquests dos casos entendre la dinàmica local (al voltant del punt fix) és complicat. Per aquesta mateixa raó, no els considerarem en aquest curs.

L'objectiu d'aquesta part del curs és estudiar la dinàmica a prop d'un punt fix hiperbòlic i un punt regular. Pel cas de punts fixos hiperbòlics veurem el que es coneix com teorema de Hartman$-$Grobman (no el demostrarem) i pel cas dels punts regulars, el teorema de flux tubular.

Teorema: Hartman$-$Grobman.
Sigui $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ obert, un camp vectorial, al menys $X \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$. Sigui x_* un punt fix hiperbòlic d'$\mathcal{U}$. Considerem $A = DX(x_*)$ i sigui $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el camp lineal següent $Y(y) = Ay$. Llavors, els camps X i Y són localment topològicament conjugats: $\exists$ entorns $\mathcal{U}_*$ d'x_* i V_* d'$y_* = 0$ tals que $\exists\, h : \mathcal{U}_* \to V_*$ homeomorfisme (ja que són conjugats topològicament), tals que $h(\varphi(t,x)) = \psi(t, h(x))$, on

$$\begin{cases} \varphi & \text{flux associat a } X\,|_{\mathcal{U}_*} \\ \psi & \text{flux associat a } Y\,|_{V*} \end{cases} \tag{78}$$

La dinàmica al voltant d'un punt fix hiperbòlic la determina el camp lineal al voltant del punt. **Dibuixos**

Remark 5.5. *Suposem que $h(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t, h(x))$, i sigui $\theta_1(x) = \{\varphi_1(t,x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ l'òrbita de t per φ_1. Aleshores,*

$$h(\theta_1(x)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} h(\varphi_1(t,x)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_2(t, h(x)) =: \theta_2(h(x)). \tag{79}$$

Aquesta és una condició bastant forta, en podria ser de més, o de menys, com es veurà pròximament. En particular,

- Si $\varphi_1(t,x) = x$, $\forall\, t$ (x és punt fix), es té

$$h(\theta_1(x)) = h(x) =: h(\varphi_1(0,x)) = \varphi_2(0, h(x)), \tag{80}$$

i per una altra banda,

$$h(\theta_1(x)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} h(\varphi_1(t,x)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_2(t, h(x)) = \theta_2(h(x)), \tag{81}$$

de forma que, juntant ambdues, trobem

$$\theta_2(h(x)) = \varphi_2(0, h(x)), \tag{82}$$

i, per tant, $h(x)$ és un punt fix (punt fix va a punt fix).

- Òrbita periòdica va a òrbita periòdica: sigui $\varphi_1(t,x) = \varphi_1(t+T,x)$. De nou, es tindrà per definició, que $h(\varphi_1(t,x)) := \varphi_2(t, h(x))$, però, a la vegada, com que $\varphi_1(t,x) = \varphi_1(t+T,x)$, es tindrà que $h(\varphi_1(t,x)) = h(\varphi_1(t+T,x))$, i, en definitiva i per definició, es tindrà també que $h(\varphi_1(t+T,x)) := \varphi_2(t+T, h(x))$. Per tant, es verificarà també

$$\varphi_2(t, h(x)) = \varphi_2(t+T, h(x)), \tag{83}$$

i, per tant, $h(x)$ té òrbita periòdica amb mateix periode que la anterior.

- Atractor va a atractor: Sigui $\varphi_1(t,x)$ tals que $\varphi_1(t,x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Com que per definició tenim $h(\varphi_1(t,x)) := \varphi_2(t,h(x))$, es tindrà

(84) $$\lim_{t\to\infty} h(\varphi_1(t,x)) = h(x_0),$$

ja que $\varphi_1 \to x_0$. Però, a la vegada,

(85) $$\lim_{t\to\infty} h(\varphi_1(t,x)) := \lim_{t\to\infty} \varphi_2(t,h(x)),$$

de forma que, combinant ambdues, trobem

(86) $$\lim_{t\to\infty} \varphi_2(t,h(x)) = h(x_0),$$

de forma que $h(x_0)$ és atractor de φ_2.

Exemple 5.6. *Un exemple evident és l'oscil·lador harmònic. Sigui l'equació*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} x,$$

La seva solució és l'oscil·lador harmònic, d'òrbites periòdiques, totes elles amb mateix periòde (però de diferent amplitud). Sigui ara l'equació

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} y,$$

amb solució també en forma d'oscil·lador harmònic. La seva velocitat, però, és diferent, i, per tant, no pot tindre el mateix periode que la anterior, de forma que no poden ser conjugats.

Existeix una definició més feble, l'equivalència topològica: òrbites van a òrbites. Aquesta permet canviar el periode $h(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(\tilde{t},h(x))$.

Remark 5.7. *Si tenim una conjugació $\mathcal{C}^r$, en aquest cas h és un difeomorfisme $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, i, aleshores, com que $h(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t,h(x))$,*

$$\frac{d}{dt}\, h(\varphi_1(t,x)) = \frac{d}{dt}\, \varphi_2(t,h(x)) \Leftrightarrow Dh(\varphi_1(t,x))\, \frac{D\varphi_1(t,x)}{Dt} = \frac{D\varphi_2(t,h(x))}{Dt},$$

recupertant que les $\varphi_i(t,\xi)$ no són més que els processos evolutius de l'equació autònoma, i que, per tant, $\partial_t \varphi_i(t,\xi) = X_i(\varphi_i(t,\xi))$, podem escriure

(87) $$Dh(\varphi_1(t,x))\; X_1(\varphi_1(t,x)) = X_2(\varphi_2(t,h(x))).$$

Evaluant a $t=0$, això es pot escriure de la forma

(88) $$Dh(\varphi_1(0,x))\; X_1(\varphi_1(0,x)) = X_2(\varphi_2(0,h(x))) \Leftrightarrow Dh(x)\; X_1(x) = X_2(h(x)).$$

Dibuixos.

A més, si tenim x_* punt fix, $v \in \mathrm{Spec}\ DX_1(x_*) \Leftrightarrow h(v) \in \mathrm{Spec}\ DX_2(h(x_*))$. Al cas $\mathcal{C}^1$ (conjugat) és molt més restrictiu.

Remark 5.8. *Si x_* és un punt fix **no hiperbòlic**, el teorema de Hartman−Grobman no aplica en general.*

5.4. **Dinàmica al voltant d'un punt regular.** Donat $\dot{x} = X(x)$, amb $X \in \mathcal{C}^r(\mathcal{U})$, $r \geq 1$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ obert. Sigui x_0 un punt regular, $X(x_0) \neq 0$. **Dibuix**. En tenim,

Teorema: del flux tubular.
Existeixen
i) V entorn obert d'x_0 ($V \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$).
ii) $\delta,\ \epsilon\ > 0$ suficientment petits.
iii) un difeomorfisme $\mathcal{C}^r$

(89) $$h^{-1}:\ V \to\ (-\epsilon,\epsilon) \times B_\delta(0)$$

tals que $X|_V$ és $\mathcal{C}^r$−conjugat via h^{-1} amb el camp $y' = (1,0,\ldots,0)^T$, que ens dona $n-1$ integrales primeres.

És a dir, tenim que **Dibuix**

Recordem què vol dir $\mathcal{C}^r-$conjugat:

$$h(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t,h(x)), \quad h \in \mathcal{C}^r \tag{90}$$

Definició:
Una secció de Poincaré Σ és una hipersuperfície regular, transversal a $X(x)$, $\forall\, x \in \Sigma$.

És a dir, donat $X\ :\ \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X \in \mathcal{C}^r(\mathcal{U})$ amb $r \geq 1$, existeix

$$\begin{aligned} \nu\ :\ B \subset \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s := (s_1, \ldots, s_{n-1}) &\longrightarrow \nu(s) \end{aligned} \tag{91}$$

és una inmersió regular, rang $D\nu(s) = n-1$, amb B obert, de forma que $\Sigma := \nu(B)$ és un hipersuperfície regular. Podem dir que Σ és una secció transversal a X si

$$\forall\, s \in B, \quad \mathbb{R}^n = \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial s_1}(s), \frac{\partial \nu}{\partial s_2}(s), \ldots, \frac{\partial \nu}{\partial s_{n-1}}(s) \right\rangle \bigoplus \left\langle X(\nu(s)) \right\rangle \tag{92}$$

o, el que vol dir el mateix, $\det(X(\nu(s)), D\nu(s)) \neq 0$, $\forall\, s \in B$. Per facilitar la cosa, podem fer ús de la notació. En aquest sentit, podem dir que Σ és transversal a X al punt x_0 de la forma $\Sigma \underset{x_0}{\pitchfork} X$.

Sabem, doncs, que donat x_0 punt regular, $X(x_0) \neq 0$, $\exists\, \Sigma \pitchfork_{x_0} X$. Dintre del, per així dir, 'tub' hi podem retornar a la nostra hipersuperfície de Poincaré, tot donat un temps t. **Dibuixos.**

Demostració Siguin $\dot{x} = X(x)$ una EDO autònoma i $\varphi(t,x)$ el seu flux associat. Definim $y = (t,s) \in D_B$, on $D_B = \{(t,s) \in \mathbb{R} \times B \mid (t, \nu(s)) \in D\}$, on D és el on tenim definit el flux $\varphi\ :\ D \to \mathbb{R}^n$. Definim

$$\begin{aligned} h\ :\ (-\epsilon, \epsilon) \times B_\delta(0) &\longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n \\ y = (t,s) &\longrightarrow h(y). \end{aligned} \tag{93}$$

Recordant que si x_0 és regular, llavors $\exists\, \Sigma \pitchfork_{x_0} X$, podem definir (de nou) $\nu\ :\ B^{n-1}(0) \to \mathbb{R}^n$ la $\mathcal{C}^r-$parametrització de $\Sigma = \nu(B)$ tals que $\nu(0) = x_0$. Així doncs, $h(y) = h(t,s) := \varphi(t, \nu(s)) := \varphi_t(\nu(s))$, l'evolució d'un punt arbitrari de Σ (recordem que $\nu(s) \in \Sigma$ ja que, per definició $\Sigma = \nu(B)$).

Per definició, també en tindrem que $h(0,0) = \varphi(0, \nu(0)) = \varphi(0, x_0) = x_0$, i, de fet, que h és localment invertible, donat que

$$D_y h(0,0) = (D_t\, h(0,0), D_s\, h(0,0)) \tag{94}$$

on

$$D_t\, h(0,0) = D_t \varphi(t, \nu(s))\Big|_{(0,0)} = X(\nu(s))\Big|_{(0,0)} = X(\nu(0)) = X(x_0), \tag{95}$$

i,

$$D_s\, h(0,0) = \left\{ h(t, \underbrace{\nu(s)}_{x_0}) \right\} = D_{x_0}\, \varphi(t, \nu(s))\, D_s\, \nu(s)\Big|_{(0,0)} = \underbrace{D_{x_0}\, \underbrace{\varphi(0,x_0)}_{x_0}}_{\mathbb{I}}\, D_s\, \nu(s)\Big|_{(0,0)} = D_s\, \nu(0). \tag{96}$$

De forma que

$$D\, h(0,0) = \left(X(x_0), \frac{\partial \nu}{\partial s_1}(0), \frac{\partial \nu}{\partial s_2}(0), \ldots, \frac{\partial \nu}{\partial s_{n-1}}(0) \right) \tag{97}$$

Com $\{\partial_{s_k} \nu(0)\}$ és base de l'espai tangent de la secció de Poincaré, i com $\Sigma \pitchfork_{x_0} X$, és a dir, $\partial_{s_k} \nu(0) \perp X(x_0)$, $\forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1$, tindrem que $\det\, D\, h(0,0) \neq 0$, i, per tant, $\exists\, h^{-1} \in \mathcal{C}^r$, o, el que es el mateix, $\exists\, V$ entorn d'x_0 tals que h és difeomorfisme $\mathcal{C}^r$ entre V i la seva imatge.

Amb això queda clar que h és difeomorfisme $\mathcal{C}^r$. Hem d'estudiar si conjuga o no. Donat que $y = (t,s)^T$, $y' = (t', s')^T = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Així, el flux $\Psi(\tau, y) := \Psi_\tau(y) = (t+\tau, s)^T$ verificarà $\varphi(\tau, h(y)) = h(\Psi(\tau, y))$. Conjuguen els fluxos?

Es pot veure que, de fet, sí. Sigui, doncs, $y = (t,s)^T$. Es té que $\varphi(\tau, h(y)) := \varphi(\tau, \varphi(t, \nu(s))) := \varphi(t+\tau, \nu(s))$ ja que φ és procés evolutiu. Ara bé, $h(\Psi(\tau, y)) = h(t+\tau, s) = \varphi(t+\tau, \nu(s))$, i, per tant, sí que en conjuguen. Això té una sèrie de conseqüències:

i) **Temps de vol a** Σ: sigui $x = h(y)$, amb $h \in \mathcal{C}^1$ un difeomorfime. Així,

$$h^{-1} : V \to (-\epsilon, \epsilon) \times B_\delta(0),$$

la funció inversa. En les condicions de sempre, $y = (t,s)^T$, $\Sigma := \nu(B) \subset V$, amb $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$, i $\Sigma \underset{x_0}{\pitchfork} X$. **Existeix** un temps de *vol* a Σ, per tot $x \in V$. Evidentment, a $t = 0$, $x \in \Sigma$, és a dir, $\exists!\, t = t_*$ tal que $\varphi_{t_*}(x) \in \Sigma$, $\forall x \in V$. Noti's que $\forall t \in [0, t_*]$, $\varphi(t,x) \in V$.
Demostració Es té que h^{-1} descomposa en components,

$$h^{-1}(x) = \begin{bmatrix} h_1^{-1}(x)) \\ \tilde{h}^{-1}(x)) \end{bmatrix},$$

on la primera component és temporal i la segona correspon a s. D'aquesta forma es té $x := h(y) = \varphi(t, \nu(s))$, però, $\nu(s) = \nu(\tilde{h}^{-1}(x))$. Així doncs, $\varphi(-t, x) = \varphi(-t, \varphi(t, \nu(s))) := \varphi(-t+t, \nu(s)) = \varphi(0, \nu(s)) = \nu(s) \in \Sigma$, on l'aplicació

$$\begin{aligned} V &\to \Sigma \\ x &\to \nu(\tilde{h}^{-1}(x)), \end{aligned}$$

és $\mathcal{C}^r$.

ii) Sigui $x_0 \in \mathcal{U}$ un punt regular, llavors, com sabem, existeix $\Sigma_1 \pitchfork_{x_0} X$. Considerem un temps fixat $t = \tau$ i $\varphi_\tau(x) := \varphi(\tau, x)$. Llavors $\varphi_\tau(x_0)$ és, també, un punt regular, de forma que, com ja sabem, també existeix $\Sigma_2 \pitchfork_{\varphi_\tau(x_0)} X$, és a dir, existeix secció de Poincaré (transversal) a $\varphi_\tau(x_0)$. Els punts diferents d'x_0 a Σ_1 no tenen perquè arribar a Σ_2. (**Dibuix**)

Ara bé, $\exists$ una aplicació "*de pas*" de Σ_1 a Σ_2 (localment a prop d'x_0, per continuïtat), $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^r$ definida en un entorn d'x_0. Si considerem $x \in \Sigma_1$, pot ser $\varphi_\tau(x) \notin \Sigma_2$, però, per continuïtat, si $|x - x_0|$ és suficientment petit, $\varphi_\tau(x) \in V_2$, s'apropa a Σ_2, de forma que $\exists\, t_{\varphi_\tau(x)}$ tals que $\varphi_{t_{\varphi_\tau(x)}}(\varphi_\tau(x)) \in \Sigma_2$. (**Dibuix**)

Per tant, podem definir $\mathcal{P}$ de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \Sigma_1 &\longrightarrow \Sigma_2 \\ x &\longrightarrow \mathcal{P}(x) = \varphi_{t_{\varphi_\tau(x)}}(\varphi_\tau(x)), \quad \mathcal{P} \in \mathcal{C}^r \end{aligned}$$

Definició: Aplicació de Poincaré
Podem definir $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ per poder definir $\mathcal{P} : \Sigma \to \Sigma$ anomenada aplicació de retorn o Poincaré (a Σ). El retorn a Σ es pot deure a l'exsitència d'òrbites periòdiques, però no només aquestes poden verificar propietats de retorn. Així doncs,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longrightarrow \varphi_{t_{\varphi_T(x)}}(\varphi_T(x)) \end{aligned}$$

L'apliació de Poincaré,al cas d'òrbites periòdiques, ens anirà molt bé per estudiar propietats com l'estabilitat.

Remark 5.9. *Les òrbites periòdiques són punts fixos de l'aplicació de Poincaré $\mathcal{P}$.*

Per poder estudiar l'estabilitat de les òrbites periòdiques necessitarem estudiar la dinàmica d'un punt fix (singular) del difeomorfisme $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}(x_0) = x_0$ és hiperbòlic, el Teorema de Hartmann−Grobmann ens diu que podem caracteritzar el tipus de punt del que es tracta estudiant la dinàmica linial (linialitzada) al voltant del punt x_0.

5.5. **Aplicació de Poincaré i estabilitat d'una òrbita periòdica.** Sigui $\dot{x} = X(x)$ una EDO autònoma. Considerem $\mathcal{P} : \Sigma \to \Sigma$ difeomorfisme $\mathcal{C}^r$, $\Sigma \pitchfork_{x_0} X$. Es té que $\mathcal{P}(x_*) = x_*$ si i només si x_* és un punt d'una òrbita periòdica de $\dot{x} = X(x)$.

Remark 5.10. *Fer servir l'aplicació de Poincaré ens permet trobar una òrbita periòdica de $\dot{x} = X(x)$ sense necessitat de saber-ne el període.*

També fer notar l'existència de l'aplicació estetrostòpica, que és, en poques paraules, l'aplicació de Poincaré per un camp amb format periòdic,

$$\dot{x} = X(x) + \epsilon g(t, x),$$

on $\mathcal{P} : x(t) \to x(t+T)$, de forma que podem escriure $\dot{x} = X(x) + \epsilon g(\theta, x)$, $\dot{\theta} = 1$, o, de mateixa forma, $z = (x, 0)$, $\dot{z} = Z(z)$, amb $\Sigma = \{\theta = 0\}$.

5.5.1. *Estabilitat de l'òrbita periòdica.* Sigui $\mathcal{P}(x_*) = x_*$ punt fix, és a dir, x_* punt d'una òrbita periòdica de $\dot{x} = X(x)$. Suposem que aquesta òrbita periòdica té període $T > 0$. Sigui z punt proper a x_*. Així

$$\begin{aligned}\varphi_T(z) &= \varphi_T(x_*) + D_{x_0}\varphi_T(x_*)(z - x_*) + \theta(|z - x_*|^2)\\ &= x_* + D_{x_0}\varphi_T(x_*) + \theta(|z - x_*|^2),\end{aligned}$$

on $D_{x_0}\varphi_T(x_*)$ és la primera variacional respecte les condicions inicials de l'òrbita periòdica a $t = T$. Recordem que la variacional respecte les condicions inicials es podia escriure amb la matriu fonamental $\dot{\mathcal{M}}(t) = D_x X(\varphi_t(x))\mathcal{M}$, amb $\mathcal{M}(0) = \mathbb{I}_{n\times n}$. Així doncs,

Definició: Matriu de monotonia
La matriu de monotonia es defineix a partir de la matriu fonamental de la variacional respecte les condicions inicials evaluada a $t = T$, on T és el període d'una òrbita periòdica,

$$\mathfrak{M} := \mathcal{M}(T).$$

Remark 5.11. *La matriu de monotonia és diferent de $D\mathcal{P}$, $\mathfrak{M} \neq D\mathcal{P}$. Per estudiar l'estabilitat volem $D\mathcal{P}$, les equacions variacionals només ens donen $\mathfrak{M}$, per desgràcia.*

Es pot veure que $\mathfrak{M}$ té un valor propi igual a 1. Sigui $\dot{\xi} = D_x X(\varphi_t(x_*))\xi$, amb $\xi \in \mathbb{R}^n$. La solució és $\xi(t) = X(\varphi_t(x_*))$. Així doncs, $\xi(0) = X(\varphi_0(x_*)) = X(x_*)$, i, efectivament, $\xi(T) = X(\varphi_T(x_*)) = X(x_*)$. Així doncs $\mathfrak{M}X(x_*) = X(x_*)$, i, per tant, $X(x_*)$ és propi d'$\mathfrak{M}$ amb valor propi 1.

Sigui $\mathcal{T}_{x_*}\Sigma = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\rangle$, llavors $\langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, X(x_*)\rangle$ és base d'$\mathbb{R}^n$. En aquesta base podem escriure

$$\mathfrak{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & D\mathcal{P}(x_*) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

on $D\mathcal{P}(x_*)$ està expresada a la base que pertoqui. En particular l'òrbita periòdica és

- **Estable:** si i només si $\forall\, \lambda \in$ Spec $D\mathcal{P}(x_*)$, $|\lambda| < 1$.
- **Inestable** si i només si $\forall\, \lambda \in$ Spec $D\mathcal{P}(x_*)$, $|\lambda| > 1$.

Ens podem fer una pregunta bastant simple com, per exemple, si tot això està ben definit. Resulta que, l'estabilitat d'una òrbita periòdica no depèn de la secció de Poincaré, és a dir, no depèn del punt x_*. De fet, l'estabilitat hauria d'ésser atribuïda l'òrbita, i, per tant, podríem agafar y_* com punt de l'òrbita periòdica i hauríem d'obtindre el mateix resultat. Això es pot veure de forma molt senzilla. Siguin $\Sigma_1 \pitchfork_{x_*} X$ i $\Sigma_2 \pitchfork_{y_*} X$, i siguin les aplicacions *de pas*, i les de Poincaré com, $\mathcal{P}_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1$, $\mathcal{P}_{12} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, $\mathcal{P}_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ i $\mathcal{P}_{21} : \Sigma_2 \to \Sigma_1$. Les aplicacions de Σ_1 a Σ_2, i a l'inrevés, defineixen un canvi de base d'$\mathbb{R}^n$, canviant els vectors de l'espai tangent de Σ i el vector del camp X, és a dir,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial s_1}(s^1), \frac{\partial \nu}{\partial s_2}(s^1), \ldots, \frac{\partial \nu}{\partial s_{n-1}}(s^1)\right\rangle \bigoplus \left\langle X(\nu(s^1))\right\rangle\\ &= \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial s_1}(s^2), \frac{\partial \nu}{\partial s_2}(s^2), \ldots, \frac{\partial \nu}{\partial s_{n-1}}(s^2)\right\rangle \bigoplus \left\langle X(\nu(s^2))\right\rangle,\end{aligned}$$

i, a més, es té $\mathcal{P}_{12}\circ\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2\circ\mathcal{P}_{12}$ per definició d'aplicació de pas. Aleshores diferenciant els difeomorfismes, trobem

$$D\mathcal{P}_2(x_*) = D\mathcal{P}_{12}(x_*)D\mathcal{P}_1(x_*)DP_{12}^{-1}(x_*)$$

de forma que són conjugats i l'espectre no varia.

5.6. **Cicles límits per camps d'$\mathbb{R}^2$.** Sigui l'EDO autònoma $\dot{x} = X(x)$, $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, amb $X \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ i $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ obert.

Definició: Cícle límit.
Un cicle límit γ és una òrbita periòdica **aïllada**.

No totes les òrbites periòdiques són aïllades. Per exemple, un camp conservatiu amb un centre. No aïllada vol dir que les òrbites veïnes són **periòdiques**. A $\mathbb{R}^2$ podem tenir 3 possibilitats:

i) γ **cile límit estable:** les òrbites veïnes convergeixen cap a γ.
ii) γ **cicle límit inestable:** les òrbites veïnes s'allunyen de γ.
iii) γ **cicle límit semiestable:** cas intermedi entre i) i ii).

Dibuixos. Aquestes, evidentment, es poden caracteritzar per l'aplicació de Poincaré, $\mathcal{P} : \Sigma \to \Sigma$, tenint en ment que per qualsevol punt del cicle límit γ, $x_* \in \gamma$, es té $\mathcal{P}(x_*) = x_*$, es té

i) γ **estable:** $\mathcal{P}'(0) < 1$.
ii) γ **inestable:** $\mathcal{P}'(0) > 1$.
iii) γ **semiestable:** $\mathcal{P}'(0) = 1$, $\mathcal{P}''(0) \neq 0$.

5.7. **Comportament assimptòtic de les solucions a $\mathbb{R}^n$.** Sigui $\dot{x} = X(x)$ una EDO autònoma i $\varphi(t, x)$ el seu flux associat.

Definició: Conjunts $\alpha-$límit i $\omega-$límit.
Sigui $x \in \mathcal{U}$ (al context del curs). Definim els conjunts $\omega-$límit, $\omega(x)$, i $\alpha-$límit, $\alpha(x)$, de la forma

$$\omega(x) = \left\{ z \in \mathcal{U} \mid \exists \{t_n\}_n \nearrow \infty \mid \varphi(t_n, x) \underset{t_n \to \infty}{\to} z \right\}$$

$$\alpha(x) = \left\{ z \in \mathcal{U} \mid \exists \{t_n\}_n \searrow -\infty \mid \varphi(t_n, x) \underset{t_n \to -\infty}{\to} z \right\}$$

Es poden caracteritzar els conjunts anterior a partir de dos petits teoremes:

Teorema: Caracterització dels $\alpha-$límit i $\omega-$límit.
Al context del curs,

i) Si $z \in \omega(x)$, llavors $z \in \overline{\theta^+(x)}$ (temps positius), i si $z \in \alpha(x)$, llavors $z \in \overline{\theta^-(x)}$ (temps negatiu).
ii) Els conjunts no depenen del punt x, sinó de l'òrbita, és a dir, si $x, y \in \theta(x)$, llavors, $\omega(x) = \omega(y)$, i de forma anàloga pel $\alpha-$límit.

Demostració Si $z \in \omega(x)$, $\exists \{t_n\}_n \nearrow +\infty$ tals que $\lim_{t_n \to \infty} \varphi(t_n, x) = z$. Així doncs, sigui $y \in \theta(x)$. Sabem doncs, que $\exists\, t^*$ tals que $y = \varphi(t^*, x)$, de forma que $x = \varphi(-t^*, y)$. D'aquesta forma

$$z = \lim_{t_n \to \infty} \varphi(t_n, x) = \lim_{t_n \to \infty} \varphi(t_n, \varphi(-t^*, y)) := \lim_{t_n \to \infty} \varphi(t_n - t^*, y) := \lim_{\tilde{t}_n \to \infty} \varphi(\tilde{t}_n, y).$$

Així doncs, $\{\tilde{t}_n := t_n - t^*\}_n \nearrow +\infty$ tals que $z \in \omega(y)$. Les definicions són, doncs, equivalents, sota una reparametrització de la successió $\{t_n\}_n$. Així doncs, podem afirmar que $\omega(x) = \omega(x_i)$, $\forall\, x_i \in \theta(x)$, o, $\omega(x) := \omega(\theta(x))$.

5.8. **Propietats dels conjunts $\alpha, \omega-$límit.** Al context del curs,

Teorema: Propietats dels conjunts $\alpha-$límit i $\omega-$límit.
Sigui $x \in \mathcal{U}$ tals que $\exists\, \mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ compacte tal que

$$\theta^+(x) = \{\varphi(t, x),\ \forall\, t > 0\} \subset \mathcal{K}.$$

Llavors $\omega(x)$ és compacte, connex, no buit (diferent del conjunt buit $(\{\emptyset\})$ i invariant pel flux (o el camp) $\varphi(t, x)$.

Demostració Tenim, en definitiva, que

$$\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\varphi([t,+\infty),x)}.$$

Així doncs $\omega(x)$ és intersecció decreixent dels conjunts $\overline{\varphi([t,+\infty),x)}$ compactes, connexos i no buits, ja que estàn contiguts a $\mathcal{K}$. Així doncs, per resultats de topologia, $\omega(x)$ és compacte, connex, i diferent del conjunt buit $\{\emptyset\}$.

Per veure que és un invariant per X, volem veure que si $z \in \omega(x)$, llavors $\varphi(t,z) \in \omega(x)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Així doncs, sigui $z \in \omega(x)$. Sabem, doncs, que $\exists\, \{t_n\}_n \nearrow +\infty$ tals que $z = \lim_{t_n\to\infty} \varphi(t_n,x)$, per un cert $x \in \mathcal{U}$. Així, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, tenim

$$\varphi(t,z) := \varphi\left(t, \lim_{t_n\to\infty} \varphi(t_n,x)\right).$$

Per continuïtat, això resulta ser,

$$\varphi(t,z) = \lim_{t_n\to\infty} \varphi(t,\varphi(t_n,x)) := \lim_{t_n\to\infty} \varphi(t+t_n,x) := \lim_{\tilde{t}_n\to\infty} \varphi(\tilde{t}_n,x) := z \in \omega(x).$$

Ja que la successió $\{\tilde{t}_n = t + t_n\}_n \nearrow +\infty$. Així doncs, $\varphi(t,z) \in \omega(x)$.

Remark 5.12. *Si $z \in \omega(x)$, llavors $\varphi(t,z) \in \omega(x) \subset \mathcal{K}$. El teorema d'aproximació de la frontera està definit $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (mai escapa de $\mathcal{K}$).*

Remark 5.13. *Si $\theta^+(x) \not\subset \mathcal{K}$ (és a dir, no existeix cap $\mathcal{K}$ compacte tals que...), llavors, potser $\omega(x)$ no connex, és a dir, no ben definit.*

Definició: Regió $D \subset \mathcal{U}$.
Incomplet

Teorema: Poincaré–Bendixon ($\mathbb{R}^2$).
Sigui $x_0 \in \mathcal{U}$. Suposem que $\exists\, \mathcal{K}$ compacte positivament invariant, és a dir, tals que $\theta^+(x) \in \mathcal{K}$, i que $X(x)$ té un nombre finit de punts crítics sobre $\omega(x_0)$, dintre de $\mathcal{K}$. Llavors $\omega(x_0)$ pot anar a

i) un punt fix.
ii) una òrbita periòdica.
iii) un gràfic.

Email address: ot.garces@ub.edu
Email address: adria.garces@ub.edu

Condensed Matter Physics Department, Universitat de Barcelona, Martí i Franquès 1, E08028 Barcelona, Spain