GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

OT GARCÉS Y ADRIÀ GARCÉS

Resumen. Basado en los apuntes del curso Geometría Diferencial de Curvas y Superfícies de la *Universidad de Barcelona.*

Índice

1. Curvas parametrizadas, reparametrizaciones, parámetro arco y espacios osculadores.

Sea I un intervalo abierto o cerrado de $\mathbb{R}$. Llamaremos *curva parametrizada* a la aplicación $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$. Tales curvas pueden ser contínuas, derivables, etc. En lo que sigue, particularizaremos en el caso de curvas infinitamente derivables, que llamaremos *curvas diferenciables* o más sencillamente curvas.

Llamaremos *traza* de $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ al subconjunto $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dirá que una curva es *plana* si su traza está contenida en un plano de $\mathbb{R}^n$ y *alabeada* si está contenida en una subvariedad lineal de dimensión 3, y no es plana. Remarcamos que la traza de α no coincide con la gráfica de α, que es el subconjunto $\Gamma = \{(t, x) \mid x = \alpha(t)\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Llamaremos punto de α a los puntos $(t, \alpha(t))$ de la gráfica Γ. Por tanto, como un punto de α es un par que queda totalmente determinado por su primera componente a partir de α, a menudo diremos que t es punto de α. También, si α inyectiva, el punto $(t, \alpha(t))$ queda determinado por su segunda componente y en este caso diremos que $p \equiv \alpha(t)$ es punto de α.

1.1. Reparametrizaciones. Curvas geométricas.

Definition 1.1. *Sea J otro intervalo de $\mathbb{R}$, una aplicación $h : J \to I$ diremos que es un* ***difeomorfismo*** *o cambio de variables si h diferenciable, biyectiva y de inversa diferenciable.*

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable, diremos que la curva $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ definida por $\beta = h \circ \alpha$, es una reparametrización de α. Si definimos entre todas las curvas parametrizadas una relación $\alpha \sim \beta$ cuando β es una reparametrización de α, es inmediato que $\sim$ es una relación de equivalencia, y llamamos *curvas geométricas* a sus clases de equivalencia. Entonces, si una curva se obtiene reparametrizando otra, se dice que representan la misma curva geométrica.

1.2. Curvas regulares. Rectas tangentes. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable. Diremos que α regular en t si la primera derivada $\alpha'(t)$ es diferente de cero. También se dice que t es punto regular de α. Por otro lado, si $\alpha'(t)$ es nula, se dice que t es punto singular de α.

Si α regular en t, llamamos vector tangente al vector $\alpha'(t)$ y definimos *la recta tangente* a la curva en el punto t como

$$\boldsymbol{x}(t) = \alpha(t) + \langle \alpha'(t) \rangle \tag{1}$$

Diremos que α es regular (o $1-$regular) si lo es para todo t . Por otro lado, notamos que si β una reparametrización de α con $\alpha = h \circ \beta$ entonces $\alpha'(t) = \beta'(h(t)) \cdot h'(t)$ con $h'(t) \neq 0$ de forma que si y solo si α regular en t entonces β regular en $h(t)$. Es decir, *la regularidad de una curva no depende de la parametrización, es una propiedad geométrica de la curva.*

Así, vemos que el vector tangente puede depender de la parametrización, pero la recta tangente no puede, y pues

$$\boldsymbol{x}(t) = \alpha(t) + \langle \alpha'(t) \rangle = \beta(h(t)) + \langle \beta'(h(t)) \rangle \tag{2}$$

y por tanto la recta tangente también es una propiedad geométrica de la curva.

Por otro lado, los vectores tangentes permiten definir ángulos entre curvas. Si suponemos que dos curvas se cortan en un mismo punto de diferentes valores de sus parámetros, podemos definir el ángulo que forman en ese punto calculando el ángulo que forman sus vectores tangentes en ese punto, es decir $\alpha'(t_1)$ y $\beta'(t_2)$.

1.3. Longitud de una curva y el parámetro arco. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable regular. Dados dos puntos t_0 y t_1 de I, se define la longitud de α entre t_0 y t_1 como

$$\operatorname{long}(\alpha;\ t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \alpha'(t) dt \tag{3}$$

De forma evidente, si $\alpha'(t) = 1$ para todo t, entonces

$$\operatorname{long}(\alpha;\ t_0, t_1) = t_1 - t_0$$

y en el supuesto caso en que $t_0 = 0$ y que $t_1 = t$ tendremos lo que recibe el nombre de arco. En el caso que la longitud de una curva coincide con el parámetro, decimos que la curva α está *parametrizada por el arco.*

Theorem 1.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable regular. Entonces existe un difeomorfismo $h : J \to I$ tal que $\beta = h \circ \alpha : J \to \mathbb{R}^n$ es una reparametrización de α, por el parámetro arco.*

Para demostrar el teorema tomaremos fijado t_0 de I y definimos $s : I \to \mathbb{R}$ como

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha'(u) du \tag{4}$$

de forma que por tel teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$s'(t) = \alpha'(t) > 0 \tag{5}$$

de forma que $s : I \to s(I)$ es una función creciente, biyectiva y de inversa diferenciable, es decir, s es un difeomorfismo. Si ahora tomamos $h : s(I) \to I$ la aplicación inversa de s, tenemos

$$h'(s) = \frac{1}{\alpha'(h(s))} \tag{6}$$

y por tanto, se verifica que como $\beta = h \circ \alpha$

$$\beta'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s) = 1 \tag{7}$$

y por tanto, β queda parametrizada por el arco.

1.4. Espacios osculadores. Se ha visto a lo largo del primer capítulo que la recta tangente no depende de la parametrización. Se puede generalizar este resultado con derivadas de orden superior

Definition 1.3. *Dado un punto t de la curva α, llamaremos espacio $k-$osculador de α en el punto t, al espacio vectorial generado por las k primeras derivadas de α en t, que denotaremos por*

$$\mathcal{T}_{k,t}\alpha := \left\langle \left\{ \alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{k)}(t) \right\} \right\rangle \tag{8}$$

Notamos que se tiene una sucesión creciente

$$\mathcal{T}_{1,t}\alpha \subseteq \mathcal{T}_{2,t}\alpha \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{T}_{k,t}\alpha \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{R}^n \tag{9}$$

y que si $\mathcal{T}_{k,t}\alpha = \mathcal{T}_{k+1,t}\alpha$ para todo t, entonces $\mathcal{T}_{k,t}\alpha = \mathcal{T}_{k+1,t}\alpha = \mathcal{T}_{k+2,t}\alpha = ...$ para todo t. Por otro lado, *se dice que la curva α es $k-$regular en el punto t si*

$$\dim \mathcal{T}_{k,t}\alpha = k \tag{10}$$

es decir, si el $\operatorname{rang}(\alpha', \dots, \alpha^{k)}) = k$. Se dice que α es $k-$regular si lo es para todo t. También, *se dice que α es $k-$regular a lo sumo en el punto t si*

$$\dim \mathcal{T}_{k,t}\alpha = k, \quad \mathcal{T}_{k,t}\alpha = \mathcal{T}_{k+1,t}\alpha = \dots \tag{11}$$

y que es $k-$regular a lo sumo si lo es para todo t.

2. La base de Frenet.

En este tema se ve cómo el proceso de ortonormalización de Gram$-$Schmidt interviene en el estudio local de una curva.

Theorem 2.1. ***Ortonormalización de Gram$-$Schmidt.*** *Dada una base de vectores linealmente independientes $\{\boldsymbol{w}_i\}$ de un espacio euclídeo E, existe una única base ortonormal $\{\boldsymbol{u}_i\}$ de E, tal que la matriz cambio de base T, cuyas columnas son las componentes de los vectores $\boldsymbol{w}_p$ en las base $\{\boldsymbol{u}_i\}$ es una matriz triangular superior y cuyos coeficientes de la diagonal principal son positivos.*

Así, si G es la matriz de Gram de la base $\{\boldsymbol{w}_i\}$, la matriz $S = T^{-1}$, cuyas columnas son las componentes de los vectores $\boldsymbol{u}_p$ de la base de Gram $-$Schmidt en la base $\{\boldsymbol{w}_i\}$, es la única matriz triangular superior, cuyos coeficientes de la diagonal principal son positivos y tal que $S^T G S = \mathbb{I}$.

Se puede relacionar esta útlima igualdad con la *factorización de Cholesky*. En efecto, recordemos que el teorema de factorización de Cholesky afirma que dada una matriz real, simétrica y definida positiva H existe una única matriz A triangular superior y con diagonal positiva, tal que $H = A^T A$. De manera que, tomando como G la matriz de Gram, vemos que $A := T$ (la matriz cuyas columas son las componentes de los vectores $\boldsymbol{w}_p$ en la base $\{\boldsymbol{u}_i\}$)y que por tanto, podemos calcular la matriz S, a partir de la factorización de Cholesky, pues $S = A^{-1}$.

2.1. La base de Frenet. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable $n-$regular. El espacio osculador $\mathcal{T}_{n,t}\alpha = \langle\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{n)}(t)\}\rangle = \mathbb{R}^n$ y como estamos considerando el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, el teorema de Gram$-$Schmidt aplicado a la base natural del espacio osculador, prueba el siguiente teorema.

Theorem 2.2. ***La base de Frenet.*** *Existe una única família de aplicaciones diferenciables*

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n : I \to \mathbb{R}^n \tag{12}$$

tal que para todo t, $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \dots, \boldsymbol{u}_n(t)\}$ es la base de Gram$-$Schmidt asociada a la base $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{n)}(t)\}$ del espacio osculador $\mathcal{T}_{n,t}\alpha$.

*A esta família de aplicaciones se le llama **base de Frenet** de la curva $\alpha(t)$. De forma más general, podríamos decir que $\alpha(t)$ es $k-$regular y obtendríamos la base de Frenet de los espacios osculadores $\mathcal{T}_{k,t}\alpha$.*

Para demostrar el teorema anterior basta con aplicar el teorema de ortonormalización de Gram$-$Schmidt. Por otro lado, ya vimos en el tema anterior que el vector tangente unitario $\alpha'(s) = \boldsymbol{u}_1(s)$ no es un invariante geométrico, pues si consideramos la parametrización $\bar{\alpha}(s) = \alpha(-s)$, entonces

$$\bar{\boldsymbol{u}}_1(s) = \bar{\alpha}(s)' = -\alpha'(-s) = -\boldsymbol{u}_1(-s) \tag{13}$$

Resulta, a partir de aquí que

$$\bar{\alpha}^{2k+1)}(s) = -\alpha^{2k+1)}(-s) \tag{14}$$

$$\bar{\alpha}^{2k)}(s) = \alpha^{2k)}(-s) \tag{15}$$

con $k \in \mathbb{N}$ y por tanto, al aplicar la ortonormalización, se obtiene

Theorem 2.3. *La base de Frenet $\{\bar{\boldsymbol{u}}_1(t), \bar{\boldsymbol{u}}_2(t), \ldots, \bar{\boldsymbol{u}}_n(t)\}$ de la reparametrización $\bar{\alpha}(s) = \alpha(-s)$ verifica*

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{2k+1}(s) = -\boldsymbol{u}_{2k+1}(-s) \tag{16}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{2k}(s) = \boldsymbol{u}_{2k}(-s) \tag{17}$$

con $k \in \mathbb{N}$. En definitiva, concluímos que la base de Frenet no es un invariante geométrico de la curva, aunque sí lo es el conjunto de rectas que engendra la base de Frenet.

2.2. Expresión matricial de la base de Frenet. Aplicando los resultados recordados al principio sobre la ortogonalización de Gram−Schmidt resulta el teorema siguiente

Theorem 2.4. *La matriz T, cuyas columnas son las componentes de los vectores $\alpha^{p)}(t)$, $p \leq n$ en la base de Frenet $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)\}$ es una matriz triangular superior cuya diagonal principal es*[1]

$$\boldsymbol{v}_1 := c, \quad \boldsymbol{v}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{v}_n \tag{18}$$

Además, si $S = T^{-1}$ es la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores de la base de Frenet $\boldsymbol{u}_p$ en la base $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\}$, entonces S es la única matriz triangular superior con diagonal principal positiva y que verifica $S^T G S = \mathbb{I}$, siendo G la matriz de Gram de la base $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\}$.

2.3. Las fórmulas de Frenet para una curva $n-$regular, parametrizada por el arco. Consideraremos $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, parametrizada por el arco, de forma que

$$\boldsymbol{t} = \alpha'(s) = \boldsymbol{u}_1(s) \tag{19}$$

debidamente normalizado por la condición de curva parametrizada por el arco. Por la propia construcción de la base de Frenet $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_n(s)\}$ sabemos que para todo $p \leq n$, se cumple

$$\begin{aligned}\langle\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_p(s)\}\rangle &= \langle\{\boldsymbol{v}_1(s), \boldsymbol{v}_2(s), \ldots, \boldsymbol{v}_p(s)\}\rangle \\ &= \langle\{\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{p)}(s)\}\rangle = \mathcal{T}_{p,s}\alpha\end{aligned}$$

por tanto, $\boldsymbol{u}_p'$ pertenece a $\mathcal{T}_{p+1,s}\alpha$ y así

$$\langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad j > p+1 \tag{20}$$

de forma que la expresión de $\boldsymbol{u}_p'$ en la base de Frenet será

$$\boldsymbol{u}_p' = \sum_{j=1}^{p+1} \langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_j \rangle \boldsymbol{u}_j \tag{21}$$

Ahora, como la base de Frenet es ortonormal, se tiene que $\langle \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{u}_j \rangle = \delta_{pj}$, por lo que al derivar se tiene

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_j \rangle + \langle \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{u}_j' \rangle &= 0 \quad \text{si} \quad p \neq j \\ \langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_p \rangle &= 0 \quad \text{si} \quad p = j\end{aligned}$$

De aquí también resulta que si $j < p-1$, se tiene

$$\langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_j \rangle = -\langle \boldsymbol{u}_j', \boldsymbol{u}_p \rangle = 0 \quad \text{ya que} \quad p > j+1 \tag{22}$$

y en consecuencia, la anterior expresión de $\boldsymbol{u}_p'$ se simplifica enormemente, pues

$$\boldsymbol{u}_p' = \sum_{j=1}^{p+1} \langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_j \rangle \boldsymbol{u}_j = \langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_{p-1} \rangle \boldsymbol{u}_{p-1} + \langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_{p+1} \rangle \boldsymbol{u}_{p+1} \tag{23}$$

$$= -\langle \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{u}_{p-1}' \rangle \boldsymbol{u}_{p-1} + \langle \boldsymbol{u}_p', \boldsymbol{u}_{p+1} \rangle \boldsymbol{u}_{p+1} \tag{24}$$

[1]la notación para los v_i son los vectores sin normalizar de la base de Gram−Schmidt, es decir, los vectores que forman la base ortogonal, no ortonormal.

de la expresión (2.13), definiremos al coeficiente $\langle \boldsymbol{u}'_p, \boldsymbol{u}_{p+1}\rangle$ como la $p-$éssima curvatura de α en el punto s, y la denotaremos por

$$k_p(s) = \langle \boldsymbol{u}'_p(s), \boldsymbol{u}_{p+1}(s)\rangle \tag{25}$$

Esta función $k_p(s)$ es diferenciable en tanto que $\boldsymbol{u}'_p(s)$ y $\boldsymbol{u}_{p+1}(s)$ lo son. De aquí hallamos

Theorem 2.5. *(de las fórmulas de Frenet). Si α es una curva parametrizada por el arco, las derivadas de la base de Frenet con respecto al parámetro arco son*

$$\boldsymbol{u}'_1(s) = k_1(s)\boldsymbol{u}_2(s) \tag{26}$$

$$\boldsymbol{u}'_2(s) = -k_1(s)\boldsymbol{u}_1(s) + k_2(s)\boldsymbol{u}_3(s) \tag{27}$$

$$\vdots \tag{28}$$

$$\boldsymbol{u}'_{n-1}(s) = -k_{n-2}(s)\boldsymbol{u}_{n-2}(s) + k_{n-1}\boldsymbol{u}_n(s) \tag{29}$$

$$\boldsymbol{u}'_n(s) = -k_{n-1}(s)\boldsymbol{u}_{n-1}(s) \tag{30}$$

Theorem 2.6. *Las curvaturas k_1, k_2, ..., k_{n-1} de una curva son invariantes geométricos.*

Recordando que vimos que si consideramos la reparametrización $\bar{\alpha}(s) = \alpha(-s)$, se verifcaba que

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{2k+1}(s) = -\boldsymbol{u}_{2k+1}(-s) \tag{31}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{2k}(s) = \boldsymbol{u}_{2k}(-s) \tag{32}$$

de forma que se verifiará que

$$\bar{\boldsymbol{u}}'_{2k+1}(s) = \boldsymbol{u}'_{2k+1}(-s) \tag{33}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}'_{2k}(s) = -\boldsymbol{u}'_{2k}(-s) \tag{34}$$

y se deduce que las curvaturas $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, ..., $\bar{k}_{n-1}$ y k_1, k_2, ..., k_{n-1} coinciden.

2.4. Cálculo de las curvaturas. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable y $n-$regular, parametrizada por el arco. Sea $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_n(s)\}$ su base de Frenet, y k_1, k_2,..., k_{n-1} sus curvaturas. Para simplificar algunas de las expresiones que siguen definiremos $k_0 := 1$.

Theorem 2.7. *Para todo $p = 1, \ldots, n$ y todo $i = 1, \ldots, p-1$ existen funciones diferenciables $\lambda_{p,i} : I \to \mathbb{R}$ tales que*

$$\alpha^{p)}(s) = (k_1k_2\ldots k_{p-1})\,\boldsymbol{u}_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{p,i}\boldsymbol{u}_i \tag{35}$$

En particular, las curvaturas k_1, k_2, ..., $k_{n-1} \neq 0$, para todo s.

Lo demostraremos por inducción sobre p. Si $p = 1$, la igualdad resulta de $k_0 = 1$, y la propia definición de $\boldsymbol{u}_1 := \alpha'(s)$. Supongamos que ahora $p > 1$ y que

$$\alpha^{p-1)}(s) = (k_1k_2\ldots k_{p-2})\,\boldsymbol{u}_{p-1} + \sum_{i=1}^{p-2} \lambda_{p-1,i}\boldsymbol{u}_i \tag{36}$$

Si derivamos la última expresión, tenemos que

$$\alpha^{p)}(s) = (k_1k_2\ldots k_{p-2})\,\boldsymbol{u}'_{p-1} + (k_1k_2\ldots k_{p-2})'\,\boldsymbol{u}_{p-1} + \sum_{i=1}^{p-2} \lambda'_{p-1,i}\boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{p-2} \lambda_{p-1,i}\boldsymbol{u}'_i$$

y aplicando las fórmulas de Frenet, resulta

$$\alpha^{p)}(s) = (k_1k_2\ldots k_{p-1})\,\boldsymbol{u}_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{p,i}\boldsymbol{u}_i \tag{37}$$

Por otro lado, si tuviéramos una curvatura nula en un punto s, entonces tendríamos

$$\alpha^{p)}(s) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{p,i} \boldsymbol{u}_i \tag{38}$$

y como $\langle \{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_{p-1}(s)\} \rangle = \langle \{\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{p-1)}(s)\} \rangle$, resultaría que α no es $n-$regular en el punto s considerado.

2.5. Base positiva de Frenet y curvatura con signo $\bar{k}_{n-1}$. Hasta ahora no hemos supuesto que el espacio euclídeo estuviera orientado pero si suponemos que lo hemos orientado de forma que la base canónica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \}$ es *positiva*, entonces se da la siguiente definción.

Definition 2.8. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable $n-$regular, y sea $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_n(s)\}$ su base de Frenet. Se llama* ***base positiva de Frenet*** *a la familia de aplicaciones diferenciables $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \bar{\boldsymbol{u}}_n(s)\}$, siendo $\bar{\boldsymbol{u}}_n(s) = \pm \boldsymbol{u}_n(s)$ tomando el signo de manera que la base sea positiva, es decir, tal que* $\det(\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \bar{\boldsymbol{u}}_n(s)) > 0$.

Es inmediato que si ponemos

$$\bar{k}_{n-1} = \pm k_{n-1}$$

según sea $\bar{\boldsymbol{u}}_n(s) = \pm \boldsymbol{u}_n(s)$, entonces las fórmulas de Frenet son válidas para la base positiva de Frenet, pues la única ecuación que cambia es la última, que ahora queda $\bar{\boldsymbol{u}}'_n(s) = -\bar{k}_{n-1} \boldsymbol{u}_{n-1}(s)$. A esta cruvatura $\bar{k}_{n-1} = \pm k_{n-1}$ se la llama *curvatura con signo* de α.

En resumen, si $\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) > 0$, la base de Frenet **coincide con la base positiva de Frenet**, y la curvatura con signo es $\bar{k}_{n-1} = k_{n-1}$, mientras que si $\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) < 0$, la base positiva de Frenet es $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, -\boldsymbol{u}_n)$ y la curvatura con signo es $\bar{k}_{n-1} = -k_{n-1}$.

2.6. Terminología clásica. En el caso de curvas planas $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, la base de Frenet está formada por dos vectores, $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s)\}$, y la base positiva de Frenet está formada por el *vector tangente unitario* y el *vector normal unitario* respectivamente,

$$\boldsymbol{t} := \boldsymbol{u}_1 \tag{39}$$

$$\boldsymbol{n} := \pm \boldsymbol{u}_2 \tag{40}$$

de forma que $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$. En el caso de curvas generalmente alabeadas $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, la base de Frenet está formada por los vectores $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \boldsymbol{u}_3(s)\}$ y la base positiva de Frenet se define por los vecotres *tangente unitario*, *normal unitario* y *binormal unitario* definidos respectivamente como

$$\boldsymbol{t} := \boldsymbol{u}_1 \tag{41}$$

$$\boldsymbol{n} := \boldsymbol{u}_2 \tag{42}$$

$$\boldsymbol{b} := \pm \boldsymbol{u}_3 \tag{43}$$

de forma que $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$. Al tratarse de casos sencillos, podemos construír los vectores sin emplear ortonormalización de Gram$-$Schimdt. Tradicionalmente, estos vectores se han calculado como

$$\boldsymbol{t} = \alpha'(s)/\alpha'(s) \tag{44}$$

$$\boldsymbol{b} = (\alpha'(s) \times \alpha''(s)) / \alpha'(s) \times \alpha''(s) \tag{45}$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t} \tag{46}$$

Con estas notaciones, el *plano osculador* $\mathcal{T}_{2,s}\alpha$ es el plano $\langle \{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}\} \rangle$, y se llama *plano tangente* al plano $\langle \{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}\} \rangle$ y *plano normal* al plano $\langle \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\} \rangle$. A veces a este triedro se le llama *triedro de Frenet*, aunque también se llama así a la base de Frenet que lo define.

En el caso de curvas planas $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, sólo se tiene una curvatura k_1, y por tanto una curvatura con signo k_1 a la que se le llama simplemente curvatura $k(s)$ de $\alpha(s)$, y por tanto verifica

$$\boldsymbol{t}' = k\boldsymbol{n} \tag{47}$$

$$\boldsymbol{n}' = -k\boldsymbol{t} \tag{48}$$

En el caso de curvas en el espacio $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, se tiene dos curvaturas k_1, k_2 y se llama curvatura a $k(s) = k_1(s)$ y torsión a $\tau(s) = k_2(s)$ de $\alpha(s)$. Las ecuaciones de Frenet quedan, entonces

$$\boldsymbol{t}' = k\boldsymbol{n} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{n}' = -k\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n} \tag{51}$$

3. Curvaturas y fórmulas de Frenet para curvas no necesariamente parametrizadas por el arco.

En el tema anterior hemos introducido las curvas y las fórmulas de Frenet para curvas, suponiendo que las curvas estaban parametrizadas por el arco. En este tema vamos a estudiar estos conceptos para una parametrización arbitraria.

3.1. Fórmulas de Frenet para una curva no parametrizada por el arco. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable $n-$regular, con *celeridad* $c = ||\alpha'(t)|| \neq 1$ (las curvas de celeridad unidad son parametrizables por el arco).

Theorem 3.1. *(de las fórmulas de Frenet) Las derivadas de la base de Frenet con respecto a t son*

$$\boldsymbol{u}_1'(t) = ck_1\boldsymbol{u}_2(t) \tag{52}$$

$$\boldsymbol{u}_2'(t) = -ck_1\boldsymbol{u}_1(t) + ck_2\boldsymbol{u}_3(t) \tag{53}$$

$$\vdots \tag{54}$$

$$\boldsymbol{u}_{n-1}'(t) = -ck_{n-2}\boldsymbol{u}_{n-2}(t) + ck_{n-1}\boldsymbol{u}_n(t) \tag{55}$$

$$\boldsymbol{u}_n'(t) = -ck_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1}(t) \tag{56}$$

Demostración. Si la curva que estudiamos $\alpha(t)$ no está parametrizada por el arco, hemos visto que existe un cambio de variables $t = h(s)$ tal que $\beta(s) = \alpha(h(s))$ sí que está parametrizado por el arco. Teniendo en cuenta que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c$, y aplicando las fórmulas de Frenet que hemos obtenido para β, resulta el teorema.

3.2. Cálculo de las curvaturas a partir de la base de Frenet. Para simplificar algunas de las expresiones que siguen definiremos $k_0 = 1$.

Theorem 3.2. *Si $\alpha(t)$ es una curva con celeridad $c = ||\alpha'(t)||$, para todo $p = 1, \ldots, n$, y todo $i = 1, \ldots, p-1$, existen funciones $\lambda_{p,i} : I \to \mathbb{R}$ tales que*

$$\alpha^{p)}(t) = (k_1k_2\ldots k_{p-1}c^p)\boldsymbol{u}_p + \sum_{1\leq i<p} \lambda_{p,i}\boldsymbol{u}_i \tag{57}$$

Demostración. Por inducción sobre p. Si $p = 1$, la igualdad resulta de $k_0 = 1$, y la propia definición de $\boldsymbol{u}_1$: $\boldsymbol{u}_1 = \alpha'/c$. Supongamos que $p > 1$, y que

$$\alpha^{p-1)}(t) = (k_1k_2\ldots k_{p-2}c^{p-1})\boldsymbol{u}_{p-1} + \sum_{1\leq i<p-1} \lambda_{p-1,i}\boldsymbol{u}_i$$

Derivando se obtiene

$$\alpha^{p)}(t) = (k_1k_2\ldots k_{p-2}c^{p-1})\boldsymbol{u}_{p-1}' + (k_1k_2\ldots k_{p-2}c^{p-1})'\boldsymbol{u}_{p-1} + \sum_{1\leq i<p-1} \lambda_{p-1,i}'\boldsymbol{u}_i$$
$$+ \sum_{1\leq i<p-1} \lambda_{p-1,i}\boldsymbol{u}_i'$$

de forma que aplicando las fórmulas de Frenet, resulta

$$\alpha^{p)}(t) = (k_1k_2\ldots k_{p-1}c^p)\,\boldsymbol{u}_p + \sum_{1\leq i<p} \lambda_{p,i}\boldsymbol{u}_i \tag{58}$$

El anterior teorema se puede expresar matricialmente: si T es la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores $\alpha^{p)}(t)$ en la base de Frenet, entonces T es una matriz triangular superior cuya diagonal principal es de la forma

$$c, k_1c^2, k_1k_2c^3, \ldots, k_1k_2\ldots k_{n-1}c^n$$

Corollary 3.3. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ es la diagonal principal de la matriz T, cuyas columnas son las componentes de los vectores $\alpha^{p)}(t)$ en la base de Frenet $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}$, con $i = 1, \ldots, n$ entonces $\lambda_1 = c$ y las curvaturas de la curva $\alpha(t)$ son*

$$k_p = \lambda_{p+1}/c\lambda_p\ , \quad p = 1, \ldots, n-1 \tag{59}$$

Corollary 3.4. *Las p primeras curvaturas $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sólo dependen de las $p+1$ primeras derivadas $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{p+1)}$ de la curva $\alpha(t)$.*

3.3. Positividad de las curvaturas. El anterior corolario se puede reformular en términos de los vectores $\{\boldsymbol{v}_i\}$ que ortogonalizan la base $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\}$, pues en el anterior tema habíamos probado que esta diagonal principal también se podía expresar como

$$\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{v}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{v}_n$$

y resulta así, inmediatamente que

Theorem 3.5. *Las curvaturas de la curva $\alpha(t)$ son*

$$k_p(t) = \boldsymbol{v}_{p+1}/\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_p, \quad p = 1, \ldots, n-1 \tag{60}$$

y en consecuencia, son positivas, esto es $k_p(t) > 0$ para todo t.

3.4. Expresión de las curvaturas en términos de determinantes. Vamos a ver, ahora, una expresión clásica de las curvaturas en términos de determinantes. Para cada t, los p primeros vectores de la base de Frenet $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \ldots, \boldsymbol{u}_p(t)\}$ forman una base del espacio osculador $\mathcal{T}_{p,t}\alpha$, así podemos considerar los determinantes

$$\begin{aligned} A_p &:= \det_{\boldsymbol{u}}\left(\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{p-1)}(t), \alpha^{p)}(t)\right) \\ &= \det_{\boldsymbol{u}}\left(\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{p-1)}(t), \alpha^{p)}(t), \boldsymbol{u}_{p+1}, \boldsymbol{u}_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\right) \end{aligned}$$

Theorem 3.6. *Si $p = 1, \ldots, n-1$, la curvatura k_p es el cociente*

$$k_p = A_{p+1}/k_1k_2\ldots k_{p-1}c^{p+1}A_p \tag{61}$$

Demostración. En un teorema anterior hemos probado que

$$\alpha^{p+1)}(t) = (k_1k_2\ldots k_pc^{p+1})\boldsymbol{u}_{p+1} + \sum_{1\le i<p+1}\lambda_{p+1,i}\boldsymbol{u}_i$$

y, por la construcción de la base de Frenet,

$$\langle\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{p)}(t)\}\rangle = \langle\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}\rangle$$

Por tanto, utilizando la primera igualdad en

$$A_{p+1} = \det_{\boldsymbol{u}}\left(\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{p)}(t), \alpha^{p+1)}(t), \boldsymbol{u}_{p+2}, \boldsymbol{u}_{p+3}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\right)$$

resulta

$$A_{p+1} = k_1k_2\ldots k_pc^{p+1}A_p \tag{62}$$

Corollary 3.7. *En el caso de la última curvatura se tiene*

$$k_{n-1} = |\det_{\boldsymbol{e}}\left(\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\right)|/\left(k_1\ldots k_{n-2}c^nA_{n-1}\right) \tag{63}$$

y por tanto

$$\bar{k}_{n-1} = \det_{\boldsymbol{e}}\left(\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\right)/\left(k_1\ldots k_{n-2}c^nA_{n-1}\right) \tag{64}$$

siendo $\{\boldsymbol{e}_i\}$ el conjunto de vectores de la base estándar de $\mathbb{R}^n$

Demostración. Se sigue del teorema que

$$\begin{aligned}
k_{n-1} &= A_n / \left(k_1 \ldots k_{n-2} c^n A_{n-1}\right) \\
&:= \det_{\boldsymbol{u}} \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\right) / \left(k_1 \ldots k_{n-2} c^n A_{n-1}\right) \\
&= |\det_{\boldsymbol{e}} \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\right)| / \left(k_1 \ldots k_{n-2} c^n A_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

dado que tanto $\{\boldsymbol{u}_i\}$ como $\{\boldsymbol{e}_i\}$ son bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ y

$$\det_{\boldsymbol{u}} \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\right) > 0$$

La igualdad para la curvatura con signo se sigue inmediatamente de la anterior.

Example 3.8. *Podemos ver cómo quedan las fórmulas anteriores para las curvaturas (con signo) en los casos clásicos de curvas planas y alabeadas. En primer lugar, podemos notar que*

$$A_1 := \det_u(\alpha'(t)) = \alpha'(t) = c \tag{65}$$

ya que por definición de $\boldsymbol{u}_1$ se tiene que $\boldsymbol{u}_1 = \alpha'(t)/\alpha'(t)$

- *Si $n = 2$, para la curvatura con signo $k(t)$ se tiene*

$$k(t) = \bar{k}_1(t) = \det_{\boldsymbol{e}} \left(\alpha'(t), \alpha''(t)\right) / \alpha'(t)^3 \tag{66}$$

- *Si $n = 3$, la curvatura $k = k_1$ y por tanto se tiene*

$$\begin{aligned}
k(t) = k_1(t) = A_2/c^2 A_1 &= \det_{\boldsymbol{u}} \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \boldsymbol{u}_3\right) / c^3 \\
&= |\det_{\boldsymbol{e}} \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \boldsymbol{u}_3\right)| / c^3 \\
&= |\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \boldsymbol{u}_3 \rangle| / c^3 \\
&= \alpha'(t) \times \alpha''(t) / c^3
\end{aligned}$$

  mientras que para la torsión $\tau(t) = \bar{k}_2(t)$ se tiene

$$\tau(t) = \bar{k}_2 = \det_{\boldsymbol{e}} \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)\right) / \alpha'(t) \times \alpha''(t)^2 \tag{67}$$

  Estas fórmulas se usan en algunas presentaciones para definir la curvatura y la torsión (a veces el signo depende del convenio tomado).

3.5. Cálculo de las curvaturas sin la base de Frenet. El resultado relevante, que vamos a ver ahora, es que los anteriores determinantes A_p se pueden obtener sin recurrir a la base de Frenet; se pueden calcular directamente a partir de las componentes del conjunto de vectores $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{n)}(t)\}$ en la base estándar de $\mathbb{R}^n$, utilizando las matrices de Gram de los espacios osculadores.

En efecto, sea G_p la matriz de Gram de la base $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{p)}(t)\}$ del espacio osculador $\mathcal{T}_{p,t}\alpha$. O sea, el menor principal superior de orden p de la matriz de Gram G_n del espacio osculador $\mathcal{T}_{n,t}\alpha$. Esta matriz de gram G_p se puede obtener con la matriz de dimensión $n \times p$ denotada por $\mathcal{D}_{p,u}$ cuyas columnas son las componentes de los vectores $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{p)}(t)\}$ en la base $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \ldots, \boldsymbol{u}_p(t)\}$, pues

$$G_p = \mathcal{D}_{p,u}^T \mathcal{D}_{p,u} \tag{68}$$

y como $\det \mathcal{D}_{p,u} := A_p$, resulta que

$$\det G_p = \det \mathcal{D}_{p,u}^T \mathcal{D}_{p,u} = (A_p)^2 \tag{69}$$

de forma inmediata se tiene que

$$A_p = +\sqrt{\det G_p} \tag{70}$$

Pero también se puede obtener la matriz de Gram G_p directamente de la matriz $n \times p$ denotada por D_p, cuyas columnas son las componentes de los vectores $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{p)}(t)\}$ en la base estándar de $\mathbb{R}^n$.

$$G_p = D_p^T D_p \tag{71}$$

y de aquí resulta

Theorem 3.9. *Para todo p, $1 \leq p \leq n-1$, se tiene que*

$$k_p = +\sqrt{\det G_{p+1}} / \left(k_1 k_2 \dots k_{p-1} c^{p+1} \sqrt{\det G_p} \right) \tag{72}$$

Notamos que en particular, se tiene que

$$k_1 = +\sqrt{\det G_2} / c^3 \tag{73}$$

$$k_2 = +\sqrt{\det G_3} / \det G_2 \tag{74}$$

Example 3.10. *En el caso de una curva en $\mathbb{R}^3$, como la identidad de Lagrange nos da*

$$\det G_2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle \langle \alpha'', \alpha'' \rangle - \langle \alpha', \alpha'' \rangle^2 = \alpha' \times \alpha''^2 \tag{75}$$

la expresión (3.22) para k_1 queda

$$k_1 = \alpha' \times \alpha'' / \alpha'^3 \tag{76}$$

como hemos visto anteriormente, y también para (3.23)

$$k_2 = \det \left(\alpha', \alpha'', \alpha''' \right) / \alpha' \times \alpha''^2 \tag{77}$$

que también es equivalente a las otras fórmulas obtenidas anteriormente.

4. El teorema de inmersión.

Recordemos que una curva diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ se dice que es $m-$regular a lo sumo si $\alpha(t)$ es $m-$regular, es decir

$$\operatorname{rang} \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m)}(t) \right) = m \quad \forall t \tag{78}$$

pero también

$$\operatorname{rang} \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m)}(t), \alpha^{m+1)}(t) \right) = m \quad \forall t \tag{79}$$

El objetivo principal de este tema es probar que toda curva $m-$regular a lo sumo tiene su traza contenida en una subvariedad lineal de dimensión m. Es decir, para toda $\alpha(t)$ $m-$regular a lo sumo, $\operatorname{Tr} \alpha(t) := \alpha(I) \subseteq \alpha(t_0) + \mathcal{T}_{m,t_0} \alpha$.

4.1. El lema de plenitud.

Para simplificar las notaciones, supondremos que $t_0 := 0 \in I$. Esto podría conseguirse haciendo una translación del dominio de definición de $\alpha(t)$ de forma que su nuevo dominio contenga t_0.

Lemma 4.1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable $m-$regular a lo sumo. Entonces la familia de subespacios osculadores*

$$\mathcal{T}_{m,t} \alpha = \langle \left\{ \alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m)}(t) \right\} \rangle \tag{80}$$

es constante, es decir, $\mathcal{T}_{m,0} \alpha = \mathcal{T}_{m,t} \alpha$, $\forall t$.

Demostración. Supongamos que $\exists\, t_0$ tal que

$$F(0) := \mathcal{T}_{m,0} \alpha \neq \mathcal{T}_{m,t_0} \alpha =: F(t_0) \tag{81}$$

entonces $\exists\ \boldsymbol{w}_{m+1}$ de $F(t_0)$ tal que $\dim\{F(0) + \langle \boldsymbol{w}_{m+1} \rangle\} = m+1$. Por el teorema de Steinitz, $\exists\, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n$ tal que

$$\langle \left\{ \alpha'(0), \alpha''(0), \dots, \alpha^{m)}(0), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n \right\} \rangle = \mathbb{R}^n \tag{82}$$

y por tanto, se tendrá que

$$\det \left(\alpha'(0), \alpha''(0), \dots, \alpha^{m)}(0), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n \right) \neq 0 \tag{83}$$

Si ahora dividimos $\boldsymbol{w}_n$ por el valor del determinante, podemos suponer que el nuevo determinante será $+1$. Consideramos ahora la función

$$D(t) := \det \left(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m)}(t), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n \right) \tag{84}$$

derivando obtenemos

$$\begin{aligned} D'(t) &= \det\Big(\alpha''(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m)}(t), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n\Big) \\ &+ \det\Big(\alpha'(t), \alpha'''(t), \dots, \alpha^{m)}(t), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n\Big) \\ &+ \cdots + \\ &+ \det\Big(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m-1)}(t), \alpha^{m+1)}(t), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n\Big) \end{aligned}$$

pues los primeros determinantes se anulan, y únicamente queda el último de ellos. Así pues

$$D'(t) = \det\Big(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m-1)}(t), \alpha^{m+1)}(t), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n\Big) \tag{85}$$

Por otro lado, como $\alpha^{m+1)}(t)$ es linealmente dependiente de $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m)}(t)$ $\forall\, t$, y estos son linealmente independientes, entonces $\exists\, h_i(t)$ diferenciables tales que

$$\alpha^{m+1)}(t) = \sum_{1\le i\le m} h_i(t)\alpha^{i)}(t) \tag{86}$$

de forma que el determinante anterior se simplifica y uno obtiene

$$\begin{aligned} D'(t) &= \det\Big(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m-1)}(t), h_m(t)\alpha^{m)}(t), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n\Big) \\ &= h_m(t)\det\Big(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{m-1)}(t), \alpha^{m)}(t), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n\Big) \\ &= h_m(t)D(t) \end{aligned}$$

de forma que obtenemos una ecuación diferencial ordinaria para $D(t)$. Esta ecuación diferencial se integra de forma inmediata y su solución es

$$D(t) = \exp\left(\int_0^t h_m(t')dt'\right) \tag{87}$$

En particular, resulta que

$$D(t_0) = \det\Big(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \dots, \alpha^{m)}(t_0), \boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{w}_n\Big) \neq 0 \tag{88}$$

lo que resulta contradictorio, puesto que habíamos tomado $\boldsymbol{w}_{m+1}$ perteneciente a $F(t_0)$. Así, $\mathcal{T}_{m,0}\alpha = \mathcal{T}_{m,t}\alpha$, $\forall t$, como queríamos demostrar.

4.2. El teorema de inmersión de las curvas $m-$regulares.

Theorem 4.2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable $m-$regular a lo sumo. Entonces, la traza de α, $\alpha(I)$ está contenida en una subvariedad afín $m-$dimensional de $\mathbb{R}^n$, que tiene como espacio director el espacio osculador $\mathcal{T}_{m,0}\alpha$.*

Por el lema anterior, bastará que probemos el teorema equivalente:

Theorem 4.3. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable $m-$regular, tal que $\mathcal{T}_{m,0}\alpha = \mathcal{T}_{m,t}\alpha$, para todo t. Entonces la traza de α, $\alpha(I)$, está contenida en una subvariedad afín $m-$dimensional de $\mathbb{R}^n$, que tiene como espacio director el spacio osculador $\mathcal{T}_{m,0}\alpha$.*

Demostración. Tomemos una base ortonormal $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{w}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{w}_n$ de $\mathbb{R}^n$ tal que los vectores $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m$ son una base de $\mathcal{T}_{m,0}\alpha$, mientras que los otros vectores $\boldsymbol{w}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{w}_n$ son una base del ortogonal de $\mathcal{T}_{m,0}\alpha$. Se verificará, entonces, que el producto escalar

$$\langle \alpha'(t), \boldsymbol{w}_i\rangle = 0 \quad \forall i = m+1, \dots, n.$$

Si consideramos, ahora, las funciones definidas por los productos escalares

$$\langle \alpha(t) - \alpha(0), \boldsymbol{w}_i\rangle, \quad i = m+1, \dots, n,$$

al derivar obtendremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \alpha(t) - \alpha(0), \boldsymbol{w}_i\rangle = \langle \alpha'(t), \boldsymbol{w}_i\rangle = 0 \quad \forall i = m+1, \dots, n,$$

y por tanto

$$\langle \alpha(t) - \alpha(0), \boldsymbol{w}_i\rangle = \text{cte} \quad \forall i = m+1, \dots, n,$$

y, como para $t = 0$ estos productos escalares son cero concluimos que

$$\langle \alpha(t) - \alpha(0), \boldsymbol{w}_i \rangle = 0, \quad \forall i = m+1, \dots, n.$$

Así, al expresar el vector $\alpha(t) - \alpha(0)$ en la base ortonormal $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$, de $\mathbb{R}^n$, obtenemos

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle \alpha(t) - \alpha(0), \boldsymbol{w}_i \rangle \boldsymbol{w}_i = \sum_{1 \leq i \leq m} \langle \alpha(t) - \alpha(0), \boldsymbol{w}_i \rangle \boldsymbol{w}_i.$$

Y, por tanto,

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \sum_{1 \leq i \leq m} \langle \alpha(t) - \alpha(0), \boldsymbol{w}_i \rangle \boldsymbol{w}_i \in \alpha(0) + \mathcal{T}_{m,0}\alpha$$

es decir que la traza de α, que es el conjunto formado por todas las imágenes de $\alpha(t)$, está contenida en la variedad afín $\alpha(0) + \mathcal{T}_{m,0}\alpha$, que es una variedad afín del espacio director $\mathcal{T}_{m,0}$ y, por tanto, es de dimensión m.

Corollary 4.4. *Si la curva es $1-$regular a lo sumo, esto es si $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t$, pero $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ son linealmente dependientes, entonces $\alpha(I)$ está contenida en la recta*

$$\boldsymbol{x} = \alpha(0) + \langle \{\alpha'(0)\} \rangle \tag{89}$$

Corollary 4.5. *Si la curva es $2-$regular a lo sumo, esto es si*

$$\operatorname{rang}(\alpha'(t), \alpha''(t)) = \operatorname{rang}(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = 2 \quad \forall t$$

entonces $\alpha(I)$ está contenida en el plano

$$\boldsymbol{\pi} = \alpha(0) + \langle \{\alpha'(0), \alpha''(0)\} \rangle \tag{90}$$

4.3. Expresión del teorema de inmersión en términos de curvaturas. Podemos dar una versión numérica del teorema de inmersión utilizando el siguiente resultado de Álgebra Lineal.

Lemma 4.6. *Sea $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m$ un conjunto de vectores de un espacio euclídeo E, entonces los vectores $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m$ son linealmente dependientes si, y sólo si, el determinante de su matriz de Gram, $G = (\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j \rangle)$, es cero (o son linealmente independientes si el determinante de su matriz de Gram es diferente de cero).*

Por tanto, podemos reformular la definición que hemos dado de una curva $m-$regular a lo sumo, utilizando determinantes de matrices Gram.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable. Consideremos, para todo p, $1 \leq p \leq m+1$, la matriz $n \times p$ $D_p(t)$ cuyas columnas son las componentes de los vectores $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{p)}(t)$ en la base estándar de $\mathbb{R}^n$, y sea

$$G_p(t) = D_p^T(t) D_p(t) \tag{91}$$

la matriz de Gram de los vectores $(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{p)}(t))$. Entonces el lema anterior implica el siguiente resultado.

Proposition 4.7. *La curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es $m-$regular a lo sumo si, y sólo si,*

$$\det G_m(t) \neq 0, \quad \forall t \tag{92}$$

y

$$\det G_{m+1}(t) = 0, \quad \forall t \tag{93}$$

O bien, si ya suponemos que la curva es $m-$regular, entonces tendremos que es $m-$regular a lo sumo si, y sólo si, $\det G_{m+1} = 0$, $\forall t$.

Ahora, recordemos que en el tema anterior vimos que las curvaturas de una curva $n-$regular α en $\mathbb{R}^n$, se pueden expresar con los determinantes de las matrices de Gram. Más precisamente, para todo p, $1 \leq p \leq n-1$, la curvatura k_p se puede obtener inductivamente a partir de los determinantes de las matrices G_p por la fórmula

$$k_p = +\sqrt{\det G_{p+1}} / \left(k_1 k_2 \dots k_{p-1} c^{p+1} \sqrt{\det G_p} \right) \tag{94}$$

Supongamos ahora que la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva $m-$regular, entonces el término de la derecha de estas expresiones está definido para $p \leq m$, y podemos utilizar estas fórmulas como definición de las curvaturas k_p, y se tiene

Proposition 4.8. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva $m-$regular, entonces α es $m-$regular a lo sumo si, y sólo si, la curvatura $k_m(t) = 0$, $\forall t$.*

Con esto el teorema de inmersión se puede reformular así:

Theorem 4.9. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable $m-$regular. Si la curvatura $k_m(t) = 0$, $\forall t$, entonces la traza de α está contenida en la subvariedad afín $m-$dimensional $\alpha(0) + \mathcal{T}_{m,0}\alpha$ de $\mathbb{R}^n$.*

4.4. Bases de Frenet y curvaturas de una curva $m-$regular, con $m \leq n$. Hemos visto que si α es una curva $n-$regular en $\mathbb{R}^n$, (y por tanto es $n-$regular a lo sumo) todas las curvaturas k_i, $1 \leq i \leq n-1$, son $k_i > 0$.

Consideremos ahora una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ $p-$regular, con $p < n$.

El siguiente resultado nos permitirá suponer en un buen número de situaciones que α es $p-$regular a lo sumo.

Proposition 4.10. *Existe un intervalo (no vacío) $J \subseteq I$, tal que la restricción de α a J, $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$, es $m-$regular a lo sumo, con $p \leq m \leq n$.*

Demostración. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es ya $p-$regular a lo sumo, la proposición queda probada trivialmente. Supongamos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ no es $p-$regular a lo sumo. Por tanto, existirá un punto s_0 tal que

$$\operatorname{rang}(\alpha'(s_0), \alpha''(s_0), \ldots, \alpha^{n)}(s_0)) = m > \operatorname{rang}(\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{p)}(s)) = p, \quad \forall s \in J.$$

Ahora existirá, por continuidad, un entorno J de s_0 tal que

$$\operatorname{rang}(\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{n)}(s)) = \operatorname{rang}(\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{m)}(s)) = m, \quad \forall s \in J \tag{95}$$

Por tanto, $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ es $m-$regular a lo sumo, con $p \leq m \leq n$.

Vemos, por esta proposición, que restringiendo la curva α a J, podemos suponer que α es $m-$regular a lo sumo.

Supongamos pues que $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es $m-$regular a lo sumo, con $m < n$.

Por el teorema de inmersión sabemos que la traza de α está contenida en un subespacio afín $L = \alpha(0) + \mathcal{T}_{m,0}\alpha$ de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m. Así tomando un sistema de coordenadas afines con origen $\alpha(0)$ y una base ortonormal de $\mathcal{T}_{m,0}\alpha$, podemos considerar que α es una aplicación $I \to \mathbb{R}^m$, y por tanto las bases de Frenet $(\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_m(s))$ y las curvaturas $k_i(s)$, $1 \leq i \leq m-1$, están definidas y son positivas $k_i(s) > 0$.

Ahora podemos tomar una base ortonormal fija $(\boldsymbol{u}_{m+1}, \boldsymbol{u}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ del subespacio ortogonal $(\mathcal{T}_{m,0}\alpha)^{\perp}$ y entonces llamaremos *base de Frenet de* $\mathbb{R}^n$ de la curva α a la base ortonormal

$$\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_m(s), \boldsymbol{u}_{m+1}, \boldsymbol{u}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

Y definiremos las curvaturas $k_i(s)$ con $m \leq i \leq n-1$ por

$$k_i(s) = 0, \quad \forall s \tag{96}$$

De esta manera, las fórmulas de Frenet que tenemos para la curva α considerada como curva $m-$regular en $\mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{u}_1'(s) = k_1(s)\boldsymbol{u}_2(s) \tag{97}$$

$$\boldsymbol{u}_2'(s) = -k_1(s)\boldsymbol{u}_1(s) + k_2(s)\boldsymbol{u}_3(s) \tag{98}$$

$$\vdots \tag{99}$$

$$\boldsymbol{u}_{m-1}'(s) = -k_{m-2}(s)\boldsymbol{u}_{m-2}(s) + k_{m-1}\boldsymbol{u}_m(s) \tag{100}$$

$$\boldsymbol{u}_m'(s) = -k_{m-1}(s)\boldsymbol{u}_{m-1}(s) \tag{101}$$

Podemos ampliarlas con

$$\boldsymbol{u}_{m+1}'(s) = -k_m(s)\boldsymbol{u}_m(s) + k_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+2}(s) \tag{102}$$

$$\vdots \tag{103}$$

$$\boldsymbol{u}_{n-1}'(s) = -k_{n-2}(s)\boldsymbol{u}_{n-2}(s) + k_{p-1}(s)\boldsymbol{u}_n(s) \tag{104}$$

$$\boldsymbol{u}_n' = -k_{n-1}(s)\boldsymbol{u}_{n-1} \tag{105}$$

ya que, al ser los vectores $\boldsymbol{u}_{m+1}, \boldsymbol{u}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{u}_n$ constantes, sus derivadas son cero, y por tanto se satisfacen trivialmente estas igualdades.

5. El teorema fundamental de la teoría de curvas.

El objetivo de este tema es estudiar la existencia de curvas con curvaturas fijadas. En primer lugar consideraremos el caso puntual, en el que consideraremos las curvaturas k_1, k_2, $\dots$, k_{n-1} en un punto. Más tarde, consideraremos el caso más importante en que tomaremos funciones curvatura $k_1(t)$, $k_2(t)$, $\dots$, $k_{n-1}(t)$ y estudiamos la existencia de curvas con estas funciones curvatura.

5.1. Forma local de una curva. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable $n-$regular, t_0 punto de $\alpha(t)$, y sean k_1, k_2, $\dots$, k_{n-1} las curvaturas de $\alpha(t)$ en t_0. Haciendo unos cambios de coordenadas podemos suponer (para simplificar las notaciones) que $t_0 = 0$ y que $\alpha(0) = 0$.

Desde el punto de vista diferenciable, la forma local de una aplicación diferenciable viene dada por el desarrollo de Taylor de la aplicación. En este caso, al sustituir en el desarrollo, tenemos

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t + \frac{1}{2!}\alpha''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{p!}\alpha^{p)}(0)t^p + \dots \tag{106}$$

Por el otro lado, recuperamos las expresiones halladas en el tema cuarto para las derivadas de $\alpha(t)$

$$\alpha^{p)}(0) = (k_1 k_2 \dots k_{p-1} c^p)\, \boldsymbol{u}_p + \sum_{1 \le i < p} \lambda_{p,i}(0) \boldsymbol{u}_i \tag{107}$$

y se obtiene el siguiente resultado.

Theorem 5.1. *Las componentes $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ de $\alpha(t)$ en la base de Frenet $\{\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \dots, \boldsymbol{u}_n(t)\}$ son*

$$\alpha_1(t) = ct + o(t) \tag{108}$$

$$\alpha_2(t) = \left(k_1 c^2/2!\right) t^2 + o(t^2) \tag{109}$$

$$\alpha_3(t) = \left(k_1 k_2 c^3/3!\right) t^3 + o(t^3) \tag{110}$$

$$\vdots \tag{111}$$

$$\alpha_n(t) = (k_1 k_2 \dots k_{n-1} c^n/n!)\, t^n + o(t^n) \tag{112}$$

siendo $o(t^p)$ una función definida en un entorno de 0, tal que $\lim_{t\to 0} o(t^p)/t^p = 0$.

Este resultado nos permite concluir que dada una familia arbitraria de curvaturas $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ la curva

$$\alpha(t) = \left(t, (k_1/2!)\, t^2, (k_1 k_2/3!)\, t^3, \dots, (k_1 k_2 \dots k_{n-1}/n!)\, t^n\right) \tag{113}$$

tiene en $t = 0$, estas curvaturas, y que cualquier otra curva con estas curvaturas en $t = 0$, es una pequeña perturbación de esta $\alpha(t)$.

5.2. El teorema fundamental de la teoría de curvas.

Theorem 5.2. *Sean $f_1(s), f_2(s), \dots, f_{n-1}(s) : I \to \mathbb{R}$, $n-1$ funciones diferenciables estrictamente positivas, entonces existe una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ $n-$regular y parametrizada por el arco, cuyas curvaturas son $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s)$ son respectivamente $f_1(s), f_2(s), \dots, f_{n-1}(s)$, es decir*

$$k_i(s) = f_i(s) \quad \forall i, s \tag{114}$$

Además, esta curva $\alpha(s)$ es única salvo isometrías de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Dado que la curva $\alpha(s)$ que buscamos, con base de Frenet $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \dots, \boldsymbol{u}_n(s)\}$ debe cumplir $\alpha'(s) = \boldsymbol{u}_1(s)$, y también las ecuaciones de Frenet, nos planteamos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\alpha'(s) = \boldsymbol{u}_1(s) \tag{115}$$

$$\boldsymbol{u}_1'(s) = f_1(s)\boldsymbol{u}_2(s) \tag{116}$$

$$\boldsymbol{u}_2'(s) = -f_1(s)\boldsymbol{u}_1(s) + f_2(s)\boldsymbol{u}_3(s) \tag{117}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_{n-1}'(s) = -f_{n-2}(s)\boldsymbol{u}_{n-2}(s) + f_{n-1}(s)\boldsymbol{u}_n(s) \tag{118}$$

$$\boldsymbol{u}_n'(s) = -f_{n-1}(s)\boldsymbol{u}_{n-1}(s) \tag{119}$$

Como para cada componente de los vectores, el anterior sistema nos da un sistema de $n+1$ ecuaciones diferenciales escalares, el anterior sistema de ecuaciones vectoriales se reduce a n sistemas de $n+1$ ecuaciones diferenciales escalares.

Si fijamos un parámetro s_0, un punto p y una base ortonormal $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, por el teorema de Cauchy de existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una única solución

$$\alpha(s), \boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_n(s) : \ I \to \mathbb{R}^n \tag{120}$$

al anterior sistema, tal que $\alpha(s_0) = p$ y $\boldsymbol{u}_i(s_0) = \boldsymbol{w}_i \ \forall i$. Notemos que esta solución es global, esto es, está definida sobre todo el dominio de definición por ser el sistema de ecuaciones lineal. Veamos también que los vectores $\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_n(s)$, que forman parte de esta solución, forman para cada s una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

En efecto, si $F(s)$ es la matriz $n \times n$ que tiene por filas los vectores $\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_n(s)$, sabemos que la base $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_n(s)\}$ es ortonormal, si, y solo si

$$F^T(s)F(s) = \mathbb{I}_{n\times n} \tag{121}$$

siendo $\mathbb{I}_{n\times n}$ la matriz identidad $n \times n$. Ahora podemos escribir la ecuación diferencial que satisface $F(s)$ en forma matricial

$$F'(s) = M(s)F(s) \tag{122}$$

siendo $M(s)$ la matriz $n \times n$ antisimétrica que nos proporciona las fórmulas de Frenet.

$$M(s) = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{123}$$

Si ahora consideramos la equación (5.17) y derivamos, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(F^T(s)F(s)\right)' &= F^{T\prime}(s)F(s) + F^T(s)F'(s) \\ &= F^T(s)M^T(s)F(s) + F^T(s)M(s)F(s) \\ &= F^T(s)\left(M^T(s) + M(s)\right)F(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que la matriz $M(s)$ es antisimétrica. De esta forma, tenemos que $F^T(s)F(s)$ es constante, y como para s_0 se tiene que $F^T(s_0)F(s_0) = \mathbb{I}_{n\times n}$, se cumple efectivamente que

$$F^T(s)F(s) = \mathbb{I}_{n\times n} \quad \forall s \tag{124}$$

Por otro lado, como $\alpha'(s) = \boldsymbol{u}_1(s)$, que es de norma unidad, resulta que α está parametrizada por el arco y que $\boldsymbol{u}_1(s)$ es el primer vector de la base de Frenet de $\alpha(s)$. Ahora, como $f_1(s) > 0$ resulta de

$\boldsymbol{u}_1'(s) = f_1(s)\boldsymbol{u}_2(s)$ que $\boldsymbol{u}_2(s)$ es el segundo vector de la base de Frenet de $\alpha(s)$ y que $k_1(s) = f_1(s)$. Y como $f_i(s) > 0\,\forall i$, se deduce, inductivamente, a partir de las realciones

$$\alpha^{p)}(s) = (k_1 k_2 \ldots k_{p-1})\,\boldsymbol{u}_p + \sum_{1 \le i < p} \lambda_{p,i}(s)\boldsymbol{u}_i \tag{125}$$

que probamos en el tema segundo, que $\{\boldsymbol{u}_1(s), \boldsymbol{u}_2(s), \ldots, \boldsymbol{u}_n(s)\}$ es la base de Frenet de $\alpha(s)$ y que $k_i(s) = f_i(s)\,\forall i, s$.

Finalmente, queremos probar la unicidad salvo las isometrías. En efecto, si $\bar{\alpha}(s) : I \to \mathbb{R}^n$ es otra curva $n-$regular, parametrizada por el arco y con las mismas funciones curvatura, entonces para el valor del parámetro s_0 tendremos el punto $\bar{p} = \bar{\alpha}(s_0)$ y la base de Frenet de $\bar{\alpha}(s)$ en ese punto $\{\bar{\boldsymbol{u}}_1(s_0), \bar{\boldsymbol{u}}_2(s_0), \ldots, \bar{\boldsymbol{u}}_n(s_0)\}$. Entonces, existe una única isometría φ del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^n$ que transforma $\bar{p}$ en p, y la base ortonormal $\{\bar{\boldsymbol{u}}_1(s_0), \bar{\boldsymbol{u}}_2(s_0), \ldots, \bar{\boldsymbol{u}}_n(s_0)\}$ en la base $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$. De esta forma, $\varphi \circ \bar{\alpha}(s)$ es una curva que satisface el mismo sistema de ecuaciones diferenciales ordinadrias que $\alpha(s)$ y que verifica las mismas condiciones inciales que ésta, así por la unicidad de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, se puede concluir que

$$\alpha(s) = \varphi \circ \bar{\alpha}(s) \tag{126}$$

Remark 5.3. *El teorema fundamental anterior resuelve totalmente el problema de clasificación (módulo isometrías) de las curvas $n-$ regulares en $\mathbb{R}^n$. Pues establece que la aplicación K, que asocia a una curva sus curvaturas, es una biyección entre el conjunto cociente*

$$\{\text{curvas}\, n- \text{ regulares } \alpha : I \to \mathbb{R}^n\}\,/\text{Isometrías} \tag{127}$$

y el conjunto

$$\{k_i : I \to \mathbb{R},\ k_i > 0 \,\text{con}\, i = 1, \ldots, n-1\} \tag{128}$$

es decir, que $\{\text{curvas}\, n- \text{ regulares } \alpha : I \to \mathbb{R}^n\}\,/\text{Isometrías} \overset{K}{\cong} \{k_i : I \to \mathbb{R},\ k_i > 0 \,\text{con}\, i = 1, \ldots, n-1\}$.

*La parte de existencia del teorema implica la exhaustividad de K, y la unicidad, salvo isometrías, implica la inyectividad de K. En el lenguaje propio de los problemas de clasificación, el hecho de que las curvaturas determinan la curva, es decir, la inyectividad, se suele expresar diciendo que las curvaturas $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ forman un **conjunto completo de invariantes**, módulo isometrías.*

5.3. Ecuaciones intrínsecas. El teorema fundamental anterior nos proporciona una forma de determinar, módulo isometrías, una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $n-$regular y parametrizada por el arco: simplemente basta que especifiquemos sus funciones de curvatura.

$$k_1(s), k_2(s), \ldots, k_{n-1}(s) : I \to \mathbb{R} \tag{129}$$

A las ecuaciones $k_i(s) = f_i(s)$, $i = 1, \ldots, n-1$, que expresan las curvaturas de una curva como función del parámetro arco se les conoce como ecuaciones intrínsecas de la curva. En el caso de una curva plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, solo se tiene una ecuación $k = f(s)$ que se conoce también como *ecuación de Cesaro* de la curva.

Muy generalmente, también se llaman ecuaciones intrínsecas de una curva, o de una família de curvas, a todo sistema de ecuaciones en que las variables sean el parámetro arco, las curvasturas y sus derivadas sucesivas, esto es un sistema

$$a_1(s, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_1', k_2', \ldots, k_{n-1}', \ldots) = 0 \tag{130}$$

$$a_2(s, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_1', k_2', \ldots, k_{n-1}', \ldots) = 0 \tag{131}$$

$$\vdots$$

$$a_m(s, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_1', k_2', \ldots, k_{n-1}', \ldots) = 0 \tag{132}$$

6. Superficies parametrizadas.

6.1. Superficies parametrizadas. Vamos a exponer la teoría de superficies en $\mathbb{R}^n$ siguiendo un camino análogo al que hemos seguido en el caso de las curvas. En lo que sigue, U es un abierto del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

Definition 6.1. *Llamaremos superficie parametrizada (o parametrización $2-D$) en $\mathbb{R}^2$ a toda aplicación diferenciable $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$.*

Es usual, aunque formalmente incorrecto, confundir la superficie parametrizada φ con su traza $\operatorname{Im} \varphi$. La superficie parametrizada es una aplicación $U \to \mathbb{R}^n$, mientras que la traza es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. En el próximo tema introduciremos un concepto de superficie (no parametrizada) que sí será un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

La mayoría de ejemplos (o ejercicios) que haremos en este curso serán superficies en el espacio ordinario $\mathbb{R}^3$, $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$, aunque también veremos algunos ejemplos en $\mathbb{R}^n$, con $n \neq 3$.

Example 6.2. *Evidentemente, todo abierto U de $\mathbb{R}^2$ define la superficie parametrizada*

$$i: U \to \mathbb{R}^2, \ i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

Example 6.3. *Si $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ son dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, y p es un punto de $\mathbb{R}^n$, la aplicación*

$$\varphi(u,v) = p + u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y}, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

define una superficie parametrizada en $\mathbb{R}^n$, cuya traza es el plano que pasa por p y el de espacio director $\langle\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}\rangle$.

Example 6.4. *La aplicación*

$$\varphi(u,v) = (r\cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v), \ (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

define una superficie parametrizada en $\mathbb{R}^3$ cuya traza es la esfera euclídea de centro el origen y radio r:

$$\boldsymbol{S}^2(0,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

Al parámetro u se le llama ángulo azimutal y al parámetro v latitud.

Example 6.5. *Si $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ es una curva $1-$regular en $\mathbb{R}^n$, la aplicación*

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + v\alpha'(u), \ (u,v) \in I \times \mathbb{R}$$

define una superficie parametrizada en $\mathbb{R}^n$, que está formada por todas las tangentes a la curva y se denomina la superficie tangencial a la curva α.

6.2. Curvas coordenadas. Las coordenadas (x,y) de $\mathbb{R}^2$, permiten definir las curvas $x = t$, $y = \text{cte}$, que son las rectas paralelas al eje x, y también las curvas $x = \text{cte}$, $y = t$, que son las rectas paralelas al eje y, a todas estas curvas se les llama las curvas coordenadas de $\mathbb{R}^2$.

En general, si $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ es una superficie parametrizada, se llaman *curvas coordenadas* de la superficie a las curvas que resultan de dejar constante una de las coordendas de U, así tendremos las curvas coordendas $\varphi(a,t)$, con $a = \text{cte}$ y las curvas coordenadas $\varphi(t,b)$, con $b = \text{cte}$.

6.3. Reparametrizaciones y parametrizaciones compatbiles. Recordemos que si V es un abierto de $\mathbb{R}^2$, un *difeomorfismo*, o *cambio de varaibles*, es una aplicación $h: V \to U$ diferenciable, biyectiva y de inversa diferenciable.

Si $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ es una superficie parametrizada, diremos que la superficie $\Psi: V \to \mathbb{R}^n$ definida por $\Psi = \varphi \circ h$, es una *reparametrización* de φ.

Example 6.6. *Consideremos el plano, con la parametrización del segundo ejemplo anterior*

$$\varphi(u,v) = p + u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Si $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ es otra base del espacio director $\langle\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}\rangle$, entonces

$$\Psi(s,t) = p + s\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w}, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

es una reparametrización de φ. El difeomorfismo $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, en este caso, es la aplicación lineal de cambio de base.

Example 6.7. *Sea*

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + v\alpha'(u), \quad (u,v) \in I \times \mathbb{R} \tag{133}$$

la superficie tangencial de la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$. Al reparametrizar la curva por el parámetro arco obtenemos la reparametrización de φ

$$\Psi(s,v) = \alpha(s) + v\alpha'(s), \quad (s,v) \in J \times \mathbb{R} \tag{134}$$

Podemos introducir, como en el caso de las curvas, una relación entre todas las superficies parametrizadas $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Diremos que $\varphi \sim \Psi$ si φ es una reparametrización de Ψ o viceversa. Es inmediato que $\sim$ es una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia son las superficies parametrizadas geométricas. Por otro lado, esta defición es muy restrictiva y consideraremos una variante más general de esta defición, considerando también aquellas superficies parametrizadas que son reparametrizaciones de φ en solo una parte de U.

Definition 6.8. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos superficies parametrizadas, sean $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$ tales que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{y})$. Diremos que φ y Ψ son* ***compatibles*** *en $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ si existen dos abiertos no vacíos $U' \subset U$, $V' \subset V$ y un difeomorfismo $h : V' \to U'$ tales que*

i) $\boldsymbol{x} \in U'$, $\boldsymbol{y} \in V'$
ii) $h(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$
iii) $\Psi(u,v) = \varphi(h(u,v)), \ \forall (u,v) \in V'$

de forma que la resitricción de Ψ a V' es una reparametrización de la restricción de φ a U'. Diremos que φ y Ψ son ***compatibles*** *si lo son en todos los puntos $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ tales que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{y})$.*

Example 6.9. *Un ejemplo viene dado por las coordenadas polares del plano, que en el presente contexto se expresa diciendo que las superficies parametrizadas*

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &= (u,v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\ \Psi(r,\theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

son compatibles. En efecto, si tomamos

$$\boldsymbol{x} := (u_0, v_0), \quad (u_0,v_0) \notin \{0\} \times \mathbb{R}^- \tag{135}$$

como $\varphi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{y})$, deberá ser

$$\boldsymbol{y} := (r_0, \theta_0), \quad -\pi + 2\pi k < \theta_0 < \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{136}$$

y entonces podemos tomar

$$U' = \mathbb{R}^2 - \{0\} \times \mathbb{R}^- \tag{137}$$

$$V' = \mathbb{R}^+ \times (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{138}$$

y pues tendremos $h(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Por el otro lado, si tenemos que

$$\boldsymbol{x} := (u_0, v_0), \quad (u_0,v_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}^- \tag{139}$$

será que entonces

$$\boldsymbol{y} = (r_0, \theta_0), \quad 2\pi k < \theta_0 < 2\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{140}$$

y entonces podemos tomar

$$U' = \mathbb{R}^2 - \{0\} \times \mathbb{R}^- \tag{141}$$

$$V' = \mathbb{R}^+ \times (2\pi k, 2\pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{142}$$

con $h(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Siendo, evidentemente en ambos casos, la aplicación h un difeomorfismo.

6.4. Superficies regladas. Una recta del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, que pasa por el punto p y tiene espacio director $\langle\{\boldsymbol{v}\}\rangle$, puede parametrizarse por

$$\gamma(t) = p + t\boldsymbol{v} \tag{143}$$

Si permitimos que p y $\boldsymbol{v}$ varíen (diferenciablemente) sobre un intérvalo I, obtendremos una superficie reglada. Así

Definition 6.10. *Se llama superficie reglada (o reparametrización reglada) en $\mathbb{R}^n$ a toda superfiie parametrizada $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, donde I es un abierto de $\mathbb{R}$, para la cual existen dos aplicaciones diferenciables $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{v} : I \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ tales que*

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\boldsymbol{v}(u) \tag{144}$$

Si fijamos un valor del parámetro u, $u := u_0 =$ cte, la curva coordenada que obtenemos es la recta que pasa por el punto $\alpha(u_0)$ y que tiene vector director $\boldsymbol{v}(u_0) \neq 0$, es decir:

$$L_a : \boldsymbol{x} = \alpha(u_0) + v\boldsymbol{v}(u_0) \tag{145}$$

*A estas recta se les llama **rectas generatrices** de la parametrización reglada. A la curva $\alpha(u)$, por la que pasan todas las generatrices, se le llama **curva directriz** de la superficie reglada.*

Dadas dos parametrizaciones regladas, $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $\Psi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(u, \lambda) := \alpha(u) + \lambda\boldsymbol{v}(u) \tag{146}$$

$$\Psi(v, \mu) := \beta(v) + \mu\boldsymbol{w}(v) \tag{147}$$

se dice que definen la misma *superficie reglada* si tienen la misma familia de rectas generatrices, es decir, si $\forall a \in I$, se tiene que

$$\alpha(a) + \langle\boldsymbol{v}(a)\rangle = \beta(a) + \langle\boldsymbol{w}(a)\rangle. \tag{148}$$

En consecuencia, una superficie reglada tiene una bien definida familia de generatrices, pero no tiene una curva directriz única (situación análoga a la que se tiene ya para una sola recta que tiene espacio director único pero no tiene un único punto de paso).

Example 6.11. *Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva 1−regular en $\mathbb{R}^n$, la **superficie tangencial** a la curva α, que hemos visto anteriormente, es*

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R} \tag{149}$$

es una parametrización reglada que tiene como curva directriz la curva α, y como generatrices las rectas tangentes a α.

En el caso de las superficies regladas son especialmente relevantes las parametrizaciones regladas compatibles:

Definition 6.12. *Sean $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $\Psi : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones regladas*

$$\varphi(u, \lambda) := \alpha(u) + \lambda\boldsymbol{v}(u) \tag{150}$$

$$\Psi(v, \mu) := \beta(v) + \mu\boldsymbol{w}(v) \tag{151}$$

y sean $\boldsymbol{x} \in I$, $\boldsymbol{y} \in J$ tales que

$$\alpha(\boldsymbol{x}) + \langle\{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\}\rangle = \beta(\boldsymbol{y}) + \langle\{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y})\}\rangle \tag{152}$$

*Diremos que φ y Ψ son **parametrizaciones regladas compatibles** en $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ si existen abiertos no vacíos I', J' de I y J respectivamente y un difeomorfismo $h : J' \to I'$ tales que*

i) $\boldsymbol{x} \in I'$, $\boldsymbol{y} \in J'$
ii) $h(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$
iii) $\alpha(h(v)) + \langle\{\boldsymbol{v}(h(v))\}\rangle = \beta(v) + \langle\{\boldsymbol{w}(v)\}\rangle, \quad \forall v \in J'$.

*De esta forma las familias de generatrices de estas dos parametrizaciones regladas coinciden. Diremos que φ y Ψ son **compatibles** si lo son en todos los puntos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ tales que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{y})$.*

Example 6.13. *El caso más usual que se nos presenta es cuando dada la parametrización reglada*

$$\varphi(u,\lambda)=\alpha(u)+\lambda\boldsymbol{v}(u) \tag{153}$$

se reparametriza por el arco su curva directriz $\alpha(t)$*, de forma que* $s=f(t)$*,* $f:\ I\to J$*. La invera de* f*,* f^{-1}*, nos define un difeomorfismo* $h=f^{-1}:\ J\to I$*, y la parametrización reglada* $\Psi:\ J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$*, definida por*

$$\Psi(v,\mu)=\alpha(f(v))+\mu\boldsymbol{v}(f(v)) \tag{154}$$

es una parametrización reglada compatible.

6.5. Superficies anilladas. Sea $L=p+F$ un plano afín del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, y sea $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ una base ortonormal del espacio director F de L. Una circunferencia de centro p y radio r en el plano L, puede parametrizarse por

$$\gamma(t)=p+r\cos t\boldsymbol{v}+r\sin t\boldsymbol{w} \tag{155}$$

Si permitimos que $p,r,\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{w}$ varíen (diferenciablemente) sobre un intérvalo I, obtendremos una superficie anillada. Así

Definition 6.14. *Se llama superficie anillada en* $\mathbb{R}^n$ *a toda superficie parametrizada* $\varphi:\ I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$*, donde* I *es un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*, para la cual existen aplicaciones diferenciables* $\alpha,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}:\ I\to\mathbb{R}^n$*,* $r:\ I\to\mathbb{R}^+$*, tales que los vectores* $\boldsymbol{v}(u)$ *y* $\boldsymbol{w}(u)$ *son ortogonales y unitarios,* $\forall u\in I$*, y*

$$\varphi(u,v)=\alpha(u)+r(u)\cos v\ \boldsymbol{v}(u)+r(u)\sin v\ \boldsymbol{w}(u) \tag{156}$$

Si fijamos un valor del parámetro u*,* $u=u_0=\mathrm{cte}$*, la curva coordenada que obtenemos es la circunferencia de centro* $\alpha(u_0)$ *y radio* $r(u_0)$*, en el plano* $\langle\{\boldsymbol{v}(u_0),\boldsymbol{w}(u_0)\}\rangle$*:*

$$\varphi(u_0,v)=\alpha(u_0)+r(u_0)\cos v\ \boldsymbol{v}(u_0)+r(u_0)\sin v\ \boldsymbol{w}(u_0) \tag{157}$$

A estas circunferencias se les llama las circunferencias generatrices de la parametrización.

A la curva $\alpha(u)$*, formada por los centros de las circunferencias generatrices, se le llama eje de la superficie anillada.*

Example 6.15. *Si el eje es una recta* $L=p\ +\langle\boldsymbol{u}\rangle$*,* $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *son constantes y ortogonales a* $\boldsymbol{u}$*, y* r *es constante, la superficie anillada correspondiente es el cilindro recto de parametrización*

$$\varphi(u,v)=p+t\boldsymbol{u}+r\cos v\ \boldsymbol{v}+r\sin v\ \boldsymbol{w} \tag{158}$$

La traza de esta parametrización, tomando el sistema de coordenadas cartesianas $\{p,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*, tiene ecuación*

$$x^2+y^2=1$$

Observemos que, como también podemos escribir

$$\varphi(u,v)=p+r\cos v\ \boldsymbol{v}+r\sin v\ \boldsymbol{w}+t\boldsymbol{u} \tag{159}$$

esta parametrización también es regalda, con curva directriz la circunferencia $p+r\cos v\ \boldsymbol{v}+r\sin v\ \boldsymbol{w}$*, es decir, que el cilindro recto es a la vez una superficie reglada y anillada.*

7. Superficies regulares.

En este tema estudiaremos la condición de regularidad de una superficie parametrizada, análogamente a cómo lo hicimos en el caso de curvas.

Recordemos que una curva $\alpha:\ I\to\mathbb{R}^n$ es regular en un punto t, si $\alpha'(t)\neq 0$, o sea, si la diferencial de α en t es de rango 1:

$$\mathrm{rang}\ \mathrm{d}\alpha_t=\mathrm{rang}\ \alpha'(t)=1 \tag{160}$$

En el caso de superficies daremos una definición totalmente análoga.

7.1. Parametrizaciones regulares. En lo que sigue U es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$.

Definition 7.1. *Sea $\varphi:\ U \to \mathbb{R}^n$ una superficie parametrizada (= parametrización $2-D$), diremos que φ es regular en un punto (u,v) de U, si la diferencial de φ en (u,v) es de rango 2:*

$$\text{rang } \mathrm{d}\varphi_{(u,v)} = 2 \tag{161}$$

Diremos que la parametrización φ es regular, si lo es $\forall(u,v)$. Como la $\mathrm{d}\varphi_{(u,v)}$ es una matriz $n \times 2$ que tiene por columnas los vectores $\varphi_u(u,v)$, $\varphi_v(u,v)$, se tiene

Proposition 7.2. *La superficie parametrizada $\varphi:\ U \to \mathbb{R}^n$ es regular en el punto (u,v) de U, si y sólo si los vectores $\varphi_u(u,v)$ y $\varphi_v(u,v)$ son linealmente independientes.*

Theorem 7.3. *Si $\varphi:\ U \to \mathbb{R}^n$ es una superficie parametrizada, regular en el punto $\boldsymbol{x} = (u_0, v_0)$ de U, entonces existe un entorno abierto V de $\boldsymbol{x}$, contenido en U, un entorno abierto W de $\varphi(\boldsymbol{x})$, y una aplciación diferenciable $\rho\ : W \to V$, tal que*

$$\rho(\varphi(u,v)) = (u,v),\ \forall\ (u,v) \in V \tag{162}$$

es decir, si notamos φ_V la resitrcción de φ a V, entonces la resitricción de ρ a la traza de φ_V es la inversa de φ_V, y en consecuencia φ_V es inyectiva.

Demostración: Sea $\varphi_u(\boldsymbol{x})$, $\varphi_v(\boldsymbol{x})$ la base del espacio tangente a φ en $\boldsymbol{x}, \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}\varphi$. Por el teorema de Steinitz, existen $n-2$ vectores de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ tales que

$$\varphi_u(\boldsymbol{x}), \varphi_v(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \cdots, \boldsymbol{w}_n$$

es una base de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos la aplicación $F\ : U \times \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(u,v,x_3,x_4,\cdots,x_n) = \varphi(u,v) + x_3\boldsymbol{w}_3 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n \tag{163}$$

Esta aplicación es diferenciable y su diferencial en $(u_0, v_0, 0, \cdots, 0)$ es la matriz que tiene por columnas $\varphi_u(\boldsymbol{x}), \varphi_v(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \cdots, \boldsymbol{w}_n$, y por tanto su rango es n.

Por el teorema de la función inversa, existe un entorno abierto V' de $(u_0, v_0, 0, \cdots, 0)$ tal que $W' = F(V')$ es un abierto de

$$F(u_0, v_0, 0, \cdots, 0) = \varphi(\boldsymbol{x})$$

en $\mathbb{R}^n$, y la restricción de F a V',

$$F_{V'}:\ V' \to W' = F(V')$$

es un difeomorfismo.

Si notamos $G:\ W' \to V'$ la inversa de $F_{V'}$, y $p_U:\ U \times \mathbb{R}^{n-2} \to U$ la proyección sobre U, podemos definir $\tau = p_U \circ G:\ W' \to U$.

Esta aplicación τ es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables, y

$$\begin{aligned}\tau(\varphi(u,v)) &= (p_U \circ G)(\varphi(u,v)) = (p_U \circ G)(F_V(u,v,0,\cdots,0)) \\ &= p_U(u,v,0,\cdots,0) = (u,v) \quad \forall\ (u,v) \in V = p_U(V' \cap (U \times 0))\end{aligned} \tag{164}$$

Finalmente, podemos tomar $W = \tau^{-1}(V)$, y ρ la restricción de τ a W:

$$\rho = \tau_W:\ W \to V$$

7.2. Plano tangente. Cuando un punto es regular podemos definir el plano tangente a la parametrización en ese punto:

Definition 7.4. *Sea $\varphi:\ U \to \mathbb{R}^n$ una superficie parametrizada, regular en el punto (u,v), llamaremos espacio tangente a la parametrización de φ en el punto (u,v) al espacio vectorial engendrado por los vectores $\varphi_u(u,v)$, $\varphi_v(u,v)$, y lo notaremos*

$$\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi = \langle\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}\rangle = \text{Im } \mathrm{d}\varphi_{(u,v)} \tag{165}$$

y llamaremos plano tangente a la parametrización φ en el punto (u,v), al plano afín

$$\boldsymbol{q} = \varphi(u,v) + \mathcal{T}_{(u,v)}\varphi \tag{166}$$

Proposition 7.5. *Si φ y Ψ son compatibles en $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, los espacios tangentes $\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}\varphi$ y $\mathcal{T}_{\boldsymbol{y}}\Psi$ coinciden.*

Podríamos decir que el espacio tangente es una propiedad geométrica de la superficie parametrizada. En un apartado próximo precisaremos este enunciado.

Los planos tangentes son un ingrediente esencial en el estudio diferencial de las superficies, y en el caso de las superficies regladas se da la siguiente definición.

Definition 7.6. *Una superficie reglada $\varphi(u,v) = \alpha(u) + v\boldsymbol{u}$ en $\mathbb{R}^n$ se dice que es* ***desarrollable*** *si el plano tangente a la superficie (en sus puntos regulares) es constante a lo largo de las generatrices.*

7.3. Parametrizaciones birregulares. Recordemos que una superficie parametrizada es una aplicación diferenciable $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$, y que es regular si

$$\text{rang}\ \mathrm{d}\varphi_{(u,v)} = 2, \quad \forall\ (u,v) \in U$$

Definition 7.7. *Una superficie parametrizada $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$ es* ***birregular*** *si es regular y la aplicación $\varphi :\ U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.*

Recordamos que un homeomorfismo es una aplicación biyectiva, contínua y de inversa contínua, por tanto, como la aplicación $\varphi :\ U \to \varphi(U)$ es claramente exhaustiva y contínua, es suficiente que $\varphi :\ U \to \varphi(U)$ sea inyectiva y de inversa contínua.

Veamos con detalle la condición que $\varphi :\ U \to \varphi(U)$ sea de inversa contínua. Como $\varphi(U)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, su topología es la topología inducida por la topología euclídea de $\mathbb{R}^n$, es decir, los abiertos de $\varphi(U)$ son la intersección de $\varphi(U)$ con los abiertos de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, $\varphi :\ U \to \varphi(U)$ es de inversa contínua, si dado un abierto V de U, su imagen $\varphi(V)$ es la intersección de $\varphi(U)$ con un abierto de $\mathbb{R}^n$. A menudo, comprobaremos esta condición viendo que la inversa, $\varphi^{-1} :\ \varphi(U) \to U$, es la restricción a $\varphi(U)$ de una aplicación contínua, $\varphi^{-1} :\ W \to U$, definida sobre un abierto W de $\mathbb{R}^n$, que contiene a $\varphi(U)$.

El concepto de parametrización birregular es invariante por difeomorfismos, como precisa la siguiente proposición.

Proposition 7.8. *Sea W un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F :\ W \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, tal que $F(W)$ es un abierto y $F :\ W \to F(W)$ es un difeomorfismo.*

Si $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$ es una superficie parametrizada birregular, tal que $\varphi(U) \subseteq W$, entonces la composición $F \circ \varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$ es una superficie parametrizada birregular.

Demostración. Probemos, en primer lugar, que $F \circ \varphi$ es regular. En efecto, si p es un punto de U, como $\mathrm{d}F_p$ es un isomorfismo y $\mathrm{d}\varphi_p$ es de rango 2, se sigue que

$$\text{rang}\ \mathrm{d}(F \circ \varphi)_p = \text{rang}\ \mathrm{d}F_p\ \mathrm{d}\varphi_p = \text{rang}\ \mathrm{d}\varphi_p = 2$$

Finalmente, dado que la restricción a un subespacio de un homeomorfismo es un homeomorfismo, se sigue que la aplicación $F \circ \varphi :\ U \to (F \circ \varphi)(U)$ es un homeomorfismo, pues es la composición de los homeomorfismos $\varphi :\ U \to \varphi(U)$ y $F :\ \varphi(U) \to (F \circ \varphi)(U) = F(\varphi(U))$.

7.4. Superficies regulares. A menudo pensamos los objetos geométricos como conjuntos de puntos, más que como aplicaciones. Veremos en este apartado cómo podemos introducir un concepto de superficie en este sentido.

Definition 7.9. *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, diremos que S es una* ***superficie regular*** *si S es localmente la traza de una superficie parametrizada birregular.*

Esto es, para todo punto $\boldsymbol{x}$ de una superficie regular S, debe existir una superficie parametrizada birregular $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$, tal que $\varphi(U)$ es un entorno abierto de $\boldsymbol{x}$ en S, considerando en S la topología euclídea.

Evidentemente, si S es la traza de una superficie parametrizada birregular, entonces S es una superficie regular.

Theorem 7.10. *Si $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$ y $\Psi :\ V \to \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones birregulares de S, entonces φ y Ψ son compatibles.*

Demostración. En efecto, sean $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$, tales que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{y})$. Hemos de probar que existen abiertos no vacíos U' y V' de U y V, respectivamente, y un difeomorfismo $h :\ V' \to U'$, tales que

i) $\boldsymbol{x} \in U'$, $\boldsymbol{y} \in V'$
ii) $h(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$

iii) $\Psi(u,v) = \varphi(h(u,v)), \quad \forall\,(u,v) \in V'$.

Como $\varphi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{y})$, la intersección $T = \varphi(U) \cap \Psi(V)$ es un abierto no vacío de S, tomaremos $U' = \varphi^{-1}(T)$, $V' = \Psi^{-1}(T)$, y $h = \varphi^{-1} \circ \Psi :\ V' \to U'$.

Entonces, tendremos inmediatamente que $\boldsymbol{x} \in U'$, $\boldsymbol{y} \in V'$ y por tanto que U' y V' son abiertos no vacíos. Además, $h(\boldsymbol{y}) = (\varphi^{-1} \circ \Psi)(\boldsymbol{y}) = \varphi^{-1}(\Psi(\boldsymbol{y})) = \varphi^{-1}(\varphi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$. Y, en general,

$$\Psi(u,v) = \varphi((\varphi^{-1} \circ \Psi)(u,v)) = \varphi(h(u,v)), \quad \forall\,(u,v) \in V' \tag{167}$$

Probaremos, ahora, que h es un difeomorfismo.

Como $\Psi^{-1} \circ \varphi :\ U' \to V'$ es inversa de h, h es biyectiva.

Finalmente, para probar que h es un difeomorfismo nos queda por probar que tanto h como su inversa h^{-1} son diferenciables. Y, de hecho, nos bastará probar que h es diferenciable, pues el argumento para h^{-1} es el mismo intercambiando el papel de las aplicaciones φ y Ψ.

Como la diferenciablidad es una propiedad local, será suficiente probar que h es diferenciable en un enterno de $\boldsymbol{y}$.

Aplicando el teorema del apartado 1, existe un entorno abierto W de $\varphi(\boldsymbol{x})$ y una aplicación diferenciable $\rho :\ W \to U$, tal que

$$\rho(\varphi(u,v)) = (u,v), \quad \forall\,(u,v) \in U' = \varphi^{-1}(W)$$

por tanto $\rho = \varphi^{-1}$ sobre $W \cap \varphi(U)$. Así, pues, sobre la intersección $V' \cap\ \Psi^{-1}(W)$, tendremos que $h = \rho \circ \Psi$. Y, como h es composición de aplicaciones diferenciables, concluimos que h es diferenciable.

Este último teorema nos permite dar la importante caracterización de las superficies regulares que sigue

Theorem 7.11. ***Caracterización de las superficies regulares:*** *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. S es una superficie regular si, y sólo si, S es la reunión de las trazas de una familia de parametrizaciones birregulares compatibles 2 a 2.*

Demostración. Si S es una superficie regular, por la definición y el teorema anterior, S es la reunión de las trazas de una familia de parametrizaciones birregulares compatbiles 2 a 2.

Recíprocamente, si S es la reunión de las trazas de una familia de parametrizaciones birregulares $\{\varphi_i\}$, compatibles 2 a 2, de forma que

$$S = \cup_i \text{traza } \varphi_i \tag{168}$$

Así, si $\boldsymbol{x}$ es un punto de S, existirá una parametrización $2-D$ birregular $\varphi_i :\ U \to \mathbb{R}^n$, tal que $\boldsymbol{x} \in \varphi_i(U)$. Y además, si existe otra parametrización $2-D$ birregular $\varphi_j :\ V \to \mathbb{R}^n$, tal que $\boldsymbol{x} \in \varphi_j(V)$, como por hipóesis estas parametrizaciones serán compatibles, resultará que en un entorno de $\boldsymbol{x}$ la traza de φ_i y la traza de φ_j coinciden.

El primer teorema de este apartado nos permite, también, introducir los espacios tangentes de las superficies regulares.

Theorem 7.12. *Sea S una superficie regular y $\boldsymbol{x}$ un punto de S. Si $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización birregular de S, tal que $\varphi(u,v) = \boldsymbol{x}$, entonces el espacio tangente en (u,v) de la parametrización φ, $\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi$, no depende de la parametrización φ.*

Definition 7.13. *Se define el* ***espacio tangente*** *a S en el punto $\boldsymbol{x}$ como el espacio vectorial $\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi$ siendo $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$ una parametrización birregular de S, tal que $\varphi(u,v) = \boldsymbol{x}$, y se nota $\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}S$, de forma que*

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}S := \mathcal{T}_{(u,v)}\varphi \tag{169}$$

y llamaremos ***plano tangente*** *a la superficie S en el punto $\boldsymbol{x}$, al plano afín*

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} + \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}S \tag{170}$$

7.5. Superficies regulares definidas implícitamente. El siguiente resultado es una forma geométrica del teorema de la función implícita, y nos ayuda en un buen número de ejemplos.

Theorem 7.14. *Sea $f :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}$ una aplicación diferenciable, sea b un punto de $\mathbb{R}^{n-2}$ y sea $S = f^{-1}(b)$. Si* rang $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}} = n-2$, $\forall \boldsymbol{x} \in S$, *entonces S es una superficie regular, y*

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}S = \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}} \tag{171}$$

Demostración. Sea p un punto de S, hemos de probar que existe un entorno de p en S que es la traza de una parametrización 2-D birregular. Al ser

$$\dim(\mathrm{Im}\ \mathrm{d}f_p) = \mathrm{rang}\ \mathrm{d}f_p = n-2$$

por el teorema de Steinitz, existen 2 vectores de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, tales que el subespacio $\langle\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}\rangle$ es un complementario de Im $\mathrm{d}f_p$:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\ \mathrm{d}f_p \bigoplus \langle\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}\rangle \tag{172}$$

Consideramos la aplicación $F:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}\times\mathbb{R}^2$, definida por

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \left(f(x_1,\cdots,x_n)-b, \sum_i (x_i-p_i)v_i, \sum_i (x_i-p_i)w_i\right) \tag{173}$$

Esta aplicación es diferenciable y su diferencial en el punto p es la matriz cuyas $n-2$ primeras filas son las de $\mathrm{d}f_p$ y cuyas dos últimas filas son $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, y, por tanto,

$$\mathrm{rang}\ \mathrm{d}F_p = n$$

Por el teorema de la función inversa, existe un entorno abierto $W = V\times U$ de

$$F(p) = \left(f(p)-b, \sum_i (p_i-p_i)v_i, \sum_i (p_i-p_i)w_i\right) = (0,0,0)$$

en $\mathbb{R}^{n-2}\times\mathbb{R}^2$, con $V\subseteq\mathbb{R}^{n-2}$ y $U\subseteq\mathbb{R}^2$, tal que $W' = F^{-1}(W)$ es un entorno abierto de p en $\mathbb{R}^n$, y la restricción de F a W',

$$F_{W'}:\ W'\to W = F(W')$$

es un difeomorfismo.

Si notamos $G:\ W\to W'$ la inversa de $F_{W'}$, y $i_U:\ U\to W = V\times U$ la inclusión natural

$$i_U(u,v) = (0,\cdots,0,u,v),$$

podemos definir $\varphi = G\circ i_U:\ U\to W'$. Esta aplicación φ verifica $\varphi(0,0)=p$, y es una parametrización birregular, por el corolario del apartado anterior.

Y como

$$f(\varphi(u,v)) = f(G\circ i_U(u,v)) = f(G(0,\cdots,0,u,v)) = b \quad \forall\ (u,v)\in U,$$

se tiene que

$$\mathrm{d}f_p \mathrm{d}\varphi_{(0,0)} = 0$$

y por tanto

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{d}\varphi_{(0,0)} \subseteq \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f_p$$

pero como estos dos espacios son los dos de dimensión 2, son iguales, y, en definitiva el espacio tangente

$$\mathcal{T}_pS = \mathrm{Im}\ \mathrm{d}\varphi_{(0,0)} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f_p$$

7.6. Vectores tangentes a una superficie y vectores tangentes a curvas. Sea S una superficie regular, $\boldsymbol{x}$ un punto de S, y $\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}S$ el espacio tangente a S en el punto $\boldsymbol{x}$.

El espacio $\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}S$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y a sus vectores les llamaremos los vectores *tangentes a la superficie* S en el punto $\boldsymbol{x}$.

Recordemos que si $\varphi:\ U\to\mathbb{R}^n$ es una parametrización birregular de S, tal que $\varphi(u,v)=\boldsymbol{x}$, entonces

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}S = \mathcal{T}_{(u,v)}\varphi = \mathrm{Im}\ \mathrm{d}\varphi_{(u,v)} \tag{174}$$

Por tanto, si $\boldsymbol{t}$ es un vector tangente a S, existe un vector (a,b) de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{t} = \mathrm{d}\ \varphi_{(u,v)}(a,b) \tag{175}$$

Si consideramos ahora en $\mathbb{R}^2$ la curvatura $\alpha:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ que define la recta que pasa por el punto (u,v) y tiene vector director (a,b):

$$\alpha(t) = (u,v)+t(a,b) \tag{176}$$

es evidente que $\alpha'(0) = (a, b)$, y entonces aplicando la regla de la cadena resulta que

$$\boldsymbol{t} = \mathrm{d}\,\varphi_{(u,v)}(a, b) = \mathrm{d}\,\varphi_{(u,v)}\alpha'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0) \tag{177}$$

es decir, el vector tangente $\boldsymbol{t}$ es el vector tangente a la curva $\gamma = \varphi \circ \alpha$ en el punto 0 tal que $\gamma(0) = \boldsymbol{x}$. Como la curva γ tiene su traza contenida en S, hemos probado

Proposition 7.15. *Todo vector tangente a S es el vector tangente a una curva cuya traza está contenida en S.*

Recíprocamente, supongamos que $\gamma :\ I \to \mathbb{R}^n$ es una curva tal que $\gamma(0) = \boldsymbol{x}$, y tiene su traza contenida en S. Podemos preguntarnos si el vector tangente a γ, $\gamma'(0)$, es un vector tangente a S.

Como S es una superficie regular, existe una parametrización birregular de S, $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$, tal que $\varphi(u, v) = \boldsymbol{x}$.

Así, la aplicación $\varphi :\ U \to \varphi(U) \in \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, y, si $J = (\gamma^{-1} \circ \varphi)(U)$, podemos definir la curva $\alpha :\ J \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\varphi^{-1} \circ \gamma)(t)$. Esta curva α verifica que

$$\alpha(0) = (\varphi^{-1} \circ \gamma)(0) = \varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) = (u, v) \tag{178}$$

dado que $\boldsymbol{x} = \varphi(u, v)$. La curva α es contínua, por composición de contínuas y vamos a ver ahora que también es diferenciable.

Como la diferenciabilidad es una propiedad local, hemos de probar que α es diferenciable en un punto $t \in J$ arbitrario. Para simplificar la notación suponemos que $t = 0$, de forma que $\alpha(0) = (u, v)$.

Por el teorema del primer apartado, existe un entorno abierto V de (u, v), contenido en U, un entorno abierto W de $\boldsymbol{x} = \varphi(u, v)$, y una aplicación diferenciable $\rho :\ W \to V$, tal que

$$\rho \circ \varphi = \mathrm{id} \text{ sobre } V, \tag{179}$$

es decir, si notamos φ_V la restricción de φ a V, entonces la restricción de ρ a la traza de φ_V es la inversa de φ_V. Para simplificar la notación, en lo que sigue supondremos que $V = U$.

Así, como la restricción de ρ a la traza de φ es la inversa de φ, tendremos que

$$\alpha(t) = (\varphi^{-1} \circ \gamma)(t) = (\varphi_V^{-1} \circ \gamma)(t) = (\rho \circ \gamma)(t),\ \forall\, t \in \alpha^{-1}(V) \tag{180}$$

y, por tanto, α es diferenciable en el abierto $\alpha^{-1}(V)$, pues se puede expresar como composición de aplicaciones diferenciables sobre este abierto.

A esta curva plana $\alpha :\ J \to \mathbb{R}^2$, tal que $\varphi \circ \alpha = \gamma$ sobre J, se llama la *expresión local de la curva γ* en la parametrización φ.

Derivando la igualdad $\gamma = \varphi \circ \alpha$ obtenemos,

$$\gamma'(0) = \mathrm{d}\,\varphi_{(u,v)}\alpha'(0) \tag{181}$$

es decir, hemos probado el recíproco de la anterior proposición. O lo que es lo mismo, hemos probado el siguiente resultado:

Theorem 7.16. *Todo vector tangente a una curva cuya traza está contenida en S es un vector tangente a S. Y, en definitiva, tenemos la igualdad:*

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}S = \{\gamma'(0);\ \gamma :\ I \to \mathbb{R}^n \text{ tal que } \gamma(0) = \boldsymbol{x},\ \gamma(I) \subseteq S\} \tag{182}$$

8. La primera forma fundamental.

En este tema introduciremos la primera forma fundamental, que es un producto escalar euclídeo sobre el espacio tangente a una superficie regular en un punto. La construcción es semejante a la de la matriz de Gram sobre el espacio 2−osculador de una curva 2−regular, que introdujimos en la primera parte del curso, pues en ambos casos se trata del producto escalar inducido, por el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, sobre un subespacio de dimensión 2.

8.1. La primera forma fundamental de una parametrización regular. En lo que sigue U será un abierto no vacio de $\mathbb{R}^2$. Recordemos que una superficie parametrizada (= parametrización $2 - D$) $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$ es *regular* si la diferencial de φ en (u, v) es de rango 2, $\forall\ (u, v) \in U$:

$$\mathrm{rang}\ \mathrm{d}\varphi_{(u,v)} = 2 \tag{183}$$

esto es, si los vectores $\varphi_u(u, v)$, $\varphi_v(u, v) \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes.

Y recordemos, también, que el *espacio osculador tangente* a la parametrización φ en el punto (u, v) es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ engendrado por los vectores $\varphi_u(u, v)$, $\varphi_v(u, v)$, y que lo notamos

$$\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi = \langle\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)\}\rangle = \operatorname{Im} \mathrm{d}\varphi_{(u,v)} \tag{184}$$

Evidentemente, al ser $\varphi_u(u, v)$ y $\varphi_v(u, v)$ linealmente independientes, tendremos que

$$\dim \mathcal{T}_{(u,v)}\varphi = 2$$

Como estamos considerando sobre $\mathbb{R}^n$ el producto escalar euclídeo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que tiene como base ortonormal la base natural $\{e_i\}$, este producto escalar induce un producto escalar sobre el espacio tangente $\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi$, cuya matriz de Gram en la base $\varphi_u(u, v)$, $\varphi_v(u, v)$ es la matriz 2×2

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \tag{185}$$

cuyos coeficientes son

$$E(u, v) = \langle\varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v)\rangle \tag{186}$$

$$F(u, v) = \langle\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)\rangle \tag{187}$$

$$G(u, v) = \langle\varphi_v(u, v), \varphi_v(u, v)\rangle \tag{188}$$

Definition 8.1. *Se llama primera forma fundamental de la parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ en el punto (u, v), al producto escalar sobre $\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi$, que acabamos de introducir, y, por tanto, la matriz*

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \tag{189}$$

es la matriz de la primera forma fundamental de φ en la base $\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)\}$ de $\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi$

Para expresar el producto escalar también emplearemos la notación $I_{\varphi,(u,v)}$, o más sencillamente, $I_{(u,v)}$ o simplemente I. De forma que las componentes de la primera forma fundamental tendrán la forma:

$$E = I(\varphi_u, \varphi_u) = \langle\varphi_u, \varphi_u\rangle \tag{190}$$

$$F = I(\varphi_u, \varphi_v) = \langle\varphi_u, \varphi_v\rangle \tag{191}$$

$$G = I(\varphi_v, \varphi_v) = \langle\varphi_v, \varphi_v\rangle \tag{192}$$

Notando que

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{193}$$

como φ_u, φ_v son las dos columnas de la diferencial $\mathrm{d}\varphi$, podemos escribir la matriz $\mathcal{I}$ como

$$\mathcal{I} = \mathrm{d}\varphi^T \mathrm{d}\varphi \tag{194}$$

Proposition 8.2. *Si $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular, los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental de φ, definen aplicaciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$ tales que*

$$E, G > 0, \text{ y } EG - F^2 > 0$$

Recordemos que si $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización compatible con φ en $\boldsymbol{x}$ se tiene que $\Psi = \varphi \circ h$, con h un difeomorfismo, y así

$$h(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$$
$$\mathrm{d}\Psi_{\boldsymbol{y}} = \mathrm{d}\varphi_{h(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}h_{\boldsymbol{y}} = \mathrm{d}\varphi_{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}h_{\boldsymbol{y}}$$

De aquí resulta que

$$\mathrm{d}\Psi_{\boldsymbol{y}}^T \mathrm{d}\Psi_{\boldsymbol{y}} = \mathrm{d}h_{\boldsymbol{y}}^T \mathrm{d}\varphi_{\boldsymbol{x}}^T \mathrm{d}\varphi_{\boldsymbol{x}} \mathrm{d}h_{\boldsymbol{y}} \tag{195}$$

por lo que queda probada la siguiente proposición:

Proposition 8.3. *El isomorfismo $\mathrm{d}h_{\boldsymbol{y}}$ es una isometría de I_φ en I_Ψ*

8.2. Cálculos métricos a partir de la primera forma fundamental. La primera forma fundamental de una superficie S nos permite realizar cálculos métricos sobre la superficie S, directamente a partir de esta primera forma, es decir, sin utilizar el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ en el que la superficie está contenida. Entre estos cálculos métricos tenemos la longitud de una curva y el ángulo de dos curvas.

Antes de ver estos cálculos reelaboraremos la definición de la primera forma fundamental.

Supongamos que $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización $2-D$ regular. Recordemos que el *espacio tangente* a la parametrización φ en un punto (u,v) de U, es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi = \langle\{\varphi_u(u,v),\ \varphi_v(u,v)\}\rangle$$

Si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son dos vectores de $\mathcal{T}_{(u,v)}\varphi$, estos vectores se pueden expresar en la base $\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)$

$$\boldsymbol{x} = a\varphi_u + b\varphi_v$$
$$\boldsymbol{y} = c\varphi_u + d\varphi_v$$

y por tanto se puede calcular el producto escalar matricialmente así

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = (a,b)\mathcal{I}(c,d)^T = Eac + F(ad+bc) + Gbd \tag{196}$$

En particular, se tiene que

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} \tag{197}$$

8.2.1. Longitud de una curva. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^n$, y sea $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable tal que la traza de γ está contenida en S.

Supongamos, para simplificar, que existe una parametrización birregular de S, $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$, tal que la traza de γ está contenida en $\varphi(U)$. Entonces vimos en el tema anterior que existe una curva $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$(\varphi \circ \alpha)(t) = \gamma(t) \tag{198}$$

y recordemos que a esta curva plana $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, se llama la *expresión local de la curva* γ en la parametrización φ. Notemos que $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, entonces al derivar la expresión $\varphi \circ \alpha = \gamma$ se obtiene

$$\gamma' = \varphi_u u' + \varphi_v v' \tag{199}$$

es decir, las componentes del vector tangente γ' en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son (u', v'), y en consecuencia

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{E(u(t),v(t))u'(t)^2 + 2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))v'(t)^2} \tag{200}$$

De aquí resulta

Proposition 8.4. *La longitud de la curva γ viene dada por*

$$\ell(\gamma; a, b) = \int_a^b \sqrt{E(u(t),v(t))u'(t)^2 + 2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))v'(t)^2}\ \mathrm{d}t \tag{201}$$

Es importante observar que, como consecuencia de esta proposición, para calcular la longitud de la curva, nos basta con conocer la expresión local de la curva y los coeficientes de la primera forma. No necesitamos conocer la expresión de la propia curva.

8.2.2. Ángulo de dos curvas. Sea S una superficie regular y sean γ_1 y γ_2 dos curvas diferenciables sobre S que se cortan en un punto p de S. Con un cambio de parámetros conveniente podemos suponer que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$.

Definition 8.5. *Se llama ángulo de las curvas γ_1 y γ_2 en el punto p al ángulo que forman sus vectores tangentes $\gamma_1'(0)$ y $\gamma_2'(0)$ en el plano euclídeo $\mathcal{T}_pS$. En particular, el coseno del ángulo de las curvas γ_1 y γ_2 en el punto p, viene dado por*

$$\cos\theta = \langle \gamma_1'(0),\ \gamma_2'(0)\rangle / ||\gamma_1'(0)||\ ||\gamma_2'(0)|| \tag{202}$$

Si $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización birregular de S, tal que la traza de γ está contenida en $\varphi(U)$, entonces todos los cálculos en la anterior expresión pueden efectuarse a partir de la primera forma fundamental de φ, y de las expresiones locales de γ_1 y γ_2.

Sea $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ una parametrización birregular, y sea $p = \varphi(u_0, v_0)$ un punto de φ. Si consideramos como curvas que se cortan en p, las curvas coordenadas $\varphi(t, v_0)$ y $\varphi(u_0, t)$, tendremos que las componentes de sus derivadas en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ serán $(1,0)$ y $(0,1)$ respectivamente, y por tanto

Proposition 8.6. *El ángulo que forma la curva coordenada $u = u_0$ con la curva coordenada $v = v_0$ en el punto de intersección $\varphi(u_0, v_0)$ es*

$$\cos\theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}} \tag{203}$$

En particular, estas curvas coordenadas son ortogonales si, y sólo si, $F(u_0, v_0) = 0$.

8.3. Área de una superficie. En Análisis Matemático se estudia el problema de asignar una $n-$medida a los subconjuntos M de un espacio euclídeo $n-$dimensional, una $n-$medida que goce de buenas propiedades, y cómo se puede resolver este problema con la teoría de la medida de Lebesgue.

Pero si un subconjunto M está contenido en una superficie de $\mathbb{R}^n$, ¿se le puede asignar una $2-$medida, es decir, un área?

Supongamos que $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización $2-D$ **birregular**, y que M es un subconjunto de la traza de φ.

Como φ es un homeomorfismo sobre su imagen, tendremos que $K = \varphi^{-1}(M)$ es homeomorfismo a M, y se define

Definition 8.7. *Se define el área de M por la integral*

$$A_M = \int_K \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{204}$$

si esta integral existe y es finita.

8.4. La curvatura de Gauss. En el estudio de una curva en un espacio euclídeo, introdujimos sus curvaturas k_i que nos daban cuenta de cómo se *doblaba la curva en cada dimensión*, de tal manera que la recta tenía curvatura nula.

En el caso de las superficies quisiéramos definir unas curvas similares, de tal manera que el plano tuviera curvatura cero. Pero la situación, ahora, es mucho más complicada, y es difícil llegar a la definición general de la curvatura de una superficie.

Lo haremos en tres pasos, en orden creciente de dificultad. La primera situación que podemos considerar, la más sencilla, es cuando se tiene una parametrización isotermal, esto es, recordemos que es una parametrización tal que $E = G$, $F = 0$, entonces tenemos,

Definition 8.8. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ una parametrización birregular. Si φ es isotermal, se define la curvatura de Gauss, o curvatura gaussiana, K de φ, por la siguiente expresión*

$$K = -\frac{1}{2E}\Delta \ln E \tag{205}$$

donde Δ es el operador Laplaciano $\Delta = \partial_u^2 + \partial_v^2$.

La segunda situación que podemos considerar, un poco más complicada que la anterior, es cuando se tiene una parametrización ortogonal, esto es, una parametrización tal que $F = 0$, entonces tenemos

Definition 8.9. *Sea φ una parametrización birregular. Si φ es ortogonal, se define la curvatura de gauss K de φ, por la siguiente expresión*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\partial_u\left(\frac{\partial_u G}{\sqrt{EG}}\right) + \partial_v\left(\frac{\partial_v E}{\sqrt{EG}}\right)\right] \tag{206}$$

Es inmediato que esta fórmula, si $E = G$, se reduce a la fórmula de la anterior definición, por lo que ésta generaliza la anterior.

Podemos dar, ahora, la definición de la curvatura de Gauss de una parametrización birregular general. Como la expresión es bastante complicada, introduciremos unas notaciones previas. Notaremos

$$D = \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 \tag{207}$$

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} E & F & E_v/2 \\ F & G & G_u/2 \\ E_v/2 & G_u/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{208}$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} E & F & F_v - G_u/2 \\ F & G & G_v/2 \\ E_v/2 & F_u - E_v/2 & F_{uv} - E_{vv}/2 - G_{uu}/2 \end{pmatrix} \tag{209}$$

entonces se tiene

Definition 8.10. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ una parametrización birregular. Se define la curvatura de Gauss K de φ, por la siguiente expresión*

$$K = \frac{D_2 - D_1}{D^2} \tag{210}$$

Definition 8.11. *Un punto (u, v) de la superficie $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, se dice que es:*

- *elíptico si $K(u, v) > 0$.*
- *parabólico si $K(u, v) = 0$.*
- *hiperbólico si $K(u, v) < 0$.*

Theorem 8.12. *Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones birregulares, sean $\boldsymbol{x} \in U$ e $\boldsymbol{y} \in V$, tales que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{y})$, y notemos K_φ, K_Ψ las curvaturas de Gauss de las parametrizaciones φ y Ψ respectivamente. Si φ y Ψ son compatibles en $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, entonces*

$$K_\varphi(\boldsymbol{x}) = K_\Psi(\boldsymbol{y}) \tag{211}$$

No daremos la demostración de este teorema en este curso, pues requiere la introducción de conceptos y resultados de nivel superior.

Este resultado permite definir la curvatura de Gauss de una superficie regular S:

Definition 8.13. *Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^n$, y sea p un punto de S, se define la curvatura de Gauss de S en p, $K(p)$, como la curvatura de Gauss $K_\varphi(\boldsymbol{x})$, siendo $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ una parametrización birregular de S, y $\boldsymbol{x}$ un punto tal que $\varphi(\boldsymbol{x}) = p$.*

9. La segunda forma fundamental.

En esta última parte del curso vamos a estudiar con detalle las superficies regulares en $\mathbb{R}^3$. El hecho de que la dimensión del espacio sea exactamente 3 nos conducirá a resultados muy notables.

Seguiremos un planteamiento análogo al que hicimos para estudiar la curvatura de una curva plana orientada. La diferencia estará en que el caso de curvas (DIM $= 1$) teníamos escalares, y ahora, en el caso de superficies (DIM $= 2$) tendremos matrices 2×2.

9.1. Repaso de la definición de curvatura de una curva plana. Consideremos una curva diferenciable regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, cuyo vector tangente en un punto de I, es el vector $\alpha'(u)$, que es una base del espacio tangente a α en u, por la definición misma del espacio tangente.

Ahora, tomemos en $\mathbb{R}^2$ un vector unitario $\hat{N}$ tal que la pareja de vectores $(\alpha', \hat{N})$ sea una base positiva de $\mathbb{R}^2$. Vimos en la primera parte del curso, que en esta situación, la *curvatura orientada* de α en u es el escalar $k(u)$ definido por

$$k(u) = \frac{\langle \alpha''(u), \hat{N} \rangle}{||\alpha'(u)||^2} \tag{212}$$

Notemos que este escalar $k(u)$ puede ser negativo.

9.2. La aplicación de Gauss. En lo que sigue U es un abierto del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, y supondremos que hemos orientado $\mathbb{R}^3$ con la orientación natural dada por su base canónica.

Vamos a ver, ahora, como podemos definir la *curvatura* de una superficie parametrizada regular $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ siguiendo un camino análogo al que acabamos de exponer para las curvas planas.

En primer lugar tenemos la base ordenada del espacio tangente en un punto (u, v) de U, formada por los vectores $\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)\}$ de forma que esta base ordenada determina una orientación del espacio tangente.

En segundo lugar buscaremos un vector normal unitario $\hat{N}_{(u,v)}$ tal que la base $\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v), \hat{N}_{(u,v)}\}$ sea una base positiva de $\mathbb{R}^3$. La respuesta es inmediata, ya que nos bastará con definir:

$$\hat{N}_{(u,v)} = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{||\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)||} \tag{213}$$

En efecto, como $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada regular se tiene

$$\text{rang } \mathrm{d}\varphi_{(u,v)} = 2, \quad \forall\ (u,v) \in U \tag{214}$$

y, equivalentemente, los vectores $\varphi_u(u,v)$ y $\varphi_v(u,v)$ de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes. De aquí resulta, por las propiedades del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$, la siguiente proposición.

Proposition 9.1. *Para todo (u,v) de U, se tiene*

1. *el vector $\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)$ es no nulo.*
2. *el vector $\hat{N}_{(u,v)}$ es ortogonal a los vectores $\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}$.*
3. *los vectores $\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v), \hat{N}_{(u,v)})\}$ forman una base positiva de $\mathbb{R}^3$.*

La siguiente definición es básica.

Definition 9.2. *Se llama aplicación de Gauss de la parametrización regular $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^3$ a la aplicación $\hat{N}_\varphi :\ U \to \mathbb{R}^3, (u,v) \to \hat{N}_{\varphi,(u,v)}(u,v)$*

$$\hat{N}_{\varphi,(u,v)} = \varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v) / ||\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)|| \tag{215}$$

Es inmediato que se tiene la proposición:

Proposition 9.3. *La aplicación de Gauss $\hat{N}$ es diferenciable y tiene su imagen contenida en S^2.*

Aplicando la identidad de Lagrange al denominador en la definición de $\hat{N}$, resulta

$$||\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)||^2 = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = EG - F^2 \tag{216}$$

Y, por tanto, también se puede expresar $\hat{N}$ como

$$\hat{N}_\varphi = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{217}$$

9.3. Superficies orientadas. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y sea p un punto de S. Si $\hat{N}_p$ es un vector unitario y ortogonal a $\mathcal{T}_pS$, este vector $\hat{N}_p$ orienta el espacio tangente $\mathcal{T}_pS$ considerando como bases positivas de $\mathcal{T}_pS$ aquellas bases $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ tales que $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{N}_p\}$ es una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

Definition 9.4. *Llamaremos **orientación** de S en p a un vector $\hat{N}_p$ unitario y ortogonal a $\mathcal{T}_pS$, y diremos que la superficie S está **orientada** en p si se ha fijado una orientación de S en p.*

*Supongamos que S está orientada en p, por $\hat{N}_p$. Llamaremos **parametrización de S positiva en** p, a toda parametrización birregular φ de S en un entorno de p, tal que el vector $\hat{N}_p$, que da la orientación de S en p, coincide con $\hat{N}_{\varphi,q}$ siendo $\varphi(q) = p$:*

$$\hat{N}_p = \hat{N}_{\varphi,q} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{218}$$

*Llamaremos **orientación** de S a una familia de orientaciones $\{\hat{N}_p\}_{p \in S}$ tal que existe un recubrimiento de S formado por las trazas de una familia de parametrizaciones birregulares de S, $\{\varphi :\ U \to \mathbb{R}^3\}$, positivas en cada uno de los puntos de sus trazas, es decir, tal que*

$$\hat{N}_{\phi(q)} = \hat{N}_{\varphi,q}, \quad \forall\ q \in U \tag{219}$$

*Diremos que S es **orientable** si existe una orientación de S.*

*Diremos que S está **orientada** si se ha fijado una orientación de S.*

9.4. La segunda forma fundamental. Siguiendo la analogía con el caso de la curvatura de una curva plana, el papel que jugaba el producto escalar $\langle \alpha''(u), \hat{N} \rangle$, ahora lo desempeñará una matriz 2×2 formada por productos escalares.

Definition 9.5. *Se llama **segunda forma fundamental** de la parametrización regular $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^3$, a la aplicación*

$$\mathcal{II}_\varphi :\ U \to M(2 \times 2, \mathbb{R}) \tag{220}$$

definida por

$$\mathcal{II}_{\varphi,(u,v)} = \begin{pmatrix} e(u,v) & f(u,v) \\ f(u,v) & g(u,v) \end{pmatrix} \tag{221}$$

cuyos coeficientes son

$$e(u,v) = \langle \varphi_{uu}(u,v), \hat{N}_{(u,v)} \rangle \tag{222}$$

$$f(u,v) = \langle \varphi_{uv}(u,v), \hat{N}_{(u,v)} \rangle = \langle \varphi_{vu}(u,v), \hat{N}_{(u,v)} \rangle \tag{223}$$

$$g(u,v) = \langle \varphi_{vv}(u,v), \hat{N}_{(u,v)} \rangle \tag{224}$$

Evidentemente la aplicación $\mathcal{II}$ es diferenciable, y las matrices $\mathcal{II}_{\varphi,(u,v)}$ son simétricas. Además, como

$$\hat{N}_\varphi = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{225}$$

se tiene

Proposition 9.6. *Los coeficientes de la segunda forma fundamental verifican:*

$$e(u,v) = \frac{(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{226}$$

$$f(u,v) = \frac{(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{227}$$

$$g(u,v) = \frac{(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{228}$$

Demostración. Es inmediata a partir de las propiedades del producto vectorial.

Sea $p = \varphi(u,v)$. Puesto que $\mathcal{II}_{\varphi,(u,v)}$ es una matriz simétrica, podemos considerar la forma bilineal simétrica $\mathcal{L}_{\varphi,p}$ (escribiremos simplemente $\mathcal{L}$ si no hay lugar a confusión), sobre el espacio tangente $\mathcal{T}_p\varphi$,

$$\mathcal{L}_{\varphi,p} : \ \mathcal{T}_p\varphi \times \mathcal{T}_p\varphi \to \mathbb{R}$$

cuya matriz en la base $\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}$ es a matriz $\mathcal{II}_{(u,v)}$. Es decir si $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ son dos vectores tangentes de $\mathcal{T}_p\varphi$, y

$$\mathbf{X} = X_1\varphi_u + X_2\varphi_v \tag{229}$$

$$\mathbf{Y} = Y_1\varphi_u + Y_2\varphi_v \tag{230}$$

entonces $\mathcal{L}_{\varphi,p}$ está definida por

$$\mathcal{L}_{\varphi,p}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (X_1, X_2)\mathcal{II}_{(u,v)}(Y_1, Y_2)^T \tag{231}$$

A esta forma se le llama *segunda forma fundamental* de φ sobre $\mathcal{T}_p\varphi$.

9.5. Interpretación geométrica de la segunda forma fundamental. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, sea p un punto de S, y supongamos que S está orientada en p, por el vector $\hat{N}$. Sea ahora $\varphi : \ U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de S, positiva en p y tal que $\varphi(u,v) = p$. Entonces, podemos dar significado geométrico a la segunda forma fundamental $\mathcal{L}_{\varphi,p}$ en términos de curvatura de secciones normales a la superficie.

Sea $\mathbf{X}$ un vector tangente unitario de $\mathcal{T}_pS$, podemos considerar el plano H que pasa por p y está generado por el espacio director $\langle\{\mathbf{X}, \hat{N}\}\rangle$, es decir

$$H = p \ + \langle\{\mathbf{X}, \hat{N}\}\rangle \tag{232}$$

Proposition 9.7. *En un entorno de p, la intersección $S \cap H = \varphi(U) \cap H$ y es la traza de una única curva regular $\alpha : \ (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por el arco, plana y tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \mathbf{X}$.*
*Por otro lado, si $\boldsymbol{n}$ es el vector normal de α en p, se verifica que $\boldsymbol{n} = \pm\hat{N}$. A la curva α se le llama **sección normal** de S definida por $\mathbf{X}$.*

La demostración sigue del teorema de la función implícita, de forma casi inmediata. La interpretación geométrica de la segunda forma fundamental nos la proporciona el siguiente teorema

Theorem 9.8. *Si $k(\mathbf{X})$ es la curvatura orientada en p de la sección normal de S que define $\mathbf{X}$, se tiene que*

$$k(\mathbf{X}) = \mathcal{L}_{\varphi,p}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \tag{233}$$

A $k(\mathbf{X})$ le llamaremos curvatura seccional de S en la dirección $\mathbf{X}$.

***Demostración*:** Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ la sección normal definida por $\mathbf{X}$. Como α está parametrizada por el arco,

$$k(\mathbf{X}) = \langle \alpha''(0), \hat{N} \rangle \tag{234}$$

Notaremos $(u(s), v(s))$ la expresión local de α en la parametrización φ, de forma que tendremos que $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$, y derivando se obtiene

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= u'(s)\varphi_u + v'(s)\varphi_v \\
\alpha''(s) &= u''(s)\varphi_u + v''(s)\varphi_v + (u'(s))^2\varphi_{uu} + 2u'(s)v'(s)\varphi_{uv} + (v'(s))^2\varphi_{vv}
\end{aligned}$$

Y por tanto, se sigue que

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{X}) = \langle \alpha''(0), \hat{N} \rangle &= \langle (u'(0))^2\varphi_{uu} + 2u'(0)v'(0)\varphi_{uv} + (v'(0))^2\varphi_{vv}, \hat{N} \rangle \\
&= (u'(0))^2\langle \varphi_{uu}, \hat{N} \rangle + 2u'(0)v'(0)\langle \varphi_{uv}, \hat{N} \rangle + (v'(0))^2\langle \varphi_{vv}, \hat{N} \rangle \\
&= (u'(0), v'(0))\mathcal{II}_p(u'(0), v'(0))^T = \mathcal{L}_{\varphi,p}(\mathbf{X}, \mathbf{X})
\end{aligned}$$

Esta interpretación geométrica nos permite obtener la invariancia de la segunda forma fundamental.

Corollary 9.9. *Sean φ y Ψ dos parametrizaciones de S, positivas en p. Entonces las segundas formas fundamentales de φ y de Ψ, sobre $\mathcal{T}_pS$, coinciden, es decir*

$$\mathcal{L}_{\varphi,p} = \mathcal{L}_{\Psi,p} \tag{235}$$

Pues, a esta forma bilineal simétrica, la notaremos simplemente por $\mathcal{L}_p$, pues se acaba de ver que no depende de la parametrización, y se le llama simplemente segunda forma fundamental de S en p con orientación $\hat{N}$.

Example 9.10. *Para un plano, todas las secciones normales son rectas, puesto que se trata de la intersección de dos planos, y por tanto todas las curvas seccionales son rectas y las curvaturas seccionales son nulas.*

Example 9.11. *Consideramos la parametrización de la esfera de radio r.*

$$\varphi(u, v) = (r\cos u \cos v, r\sin u \cos v, r\sin v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \tag{236}$$

Podemos calcular su segunda forma fundamental y ver que

$$\mathcal{II}_{(u,v)} = -\begin{pmatrix} r\cos^2 v & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \tag{237}$$

Y entonces definimos $\mathbf{X} = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v \in \mathcal{T}_p\varphi$, con $p = \varphi(u, v)$, y tendremos que

$$k(\mathbf{X}) = \mathcal{L}_{\varphi,p}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = -r\cos^2 v\lambda^2 - r\mu^2 \tag{238}$$

Pero $\mathbf{X}$ es unitario, y como la primera forma es

$$\mathcal{I}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} r^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{239}$$

Nos queda que

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}\mathcal{I}_{(u,v)}\mathbf{X}^T = r^2\cos^2 v\lambda^2 + r^2\mu^2 = 1 \tag{240}$$

De forma que

$$rk(\mathbf{X}) = -r^2\cos^2 v\lambda^2 - r^2\mu^2 = -1 \tag{241}$$

De forma que se puede ver que todas las secciones normales de una esfera de radio r son curvas planas de curvatura orientada $-1/r$, y por tanto, las curvas seccionales son circunferencias de radio r, como era de esperar. En este caso, la curvatura orientada es negativa, porque si denotamos por $\boldsymbol{n}$, se verifica que $\boldsymbol{n} = -\hat{N}$. Podemos considerar, por ejemplo, $p = \varphi(0, 0)$, y un vector tangente $\mathbf{X} = (1/r)\varphi_u$. La sección normal es

$$\alpha(u) = \varphi(u, 0) = (r\cos u, r\sin u, 0) \tag{242}$$

la cual tiene, para $u = 0$ vector normal $\boldsymbol{n} = (-1, 0, 0)$, mientras que el vector normal a la superficie $\hat{N}_\varphi$ es

$$\hat{N}_\varphi = \varphi_u \times \varphi_v / \sqrt{EG - F^2} = (1, 0, 0) \tag{243}$$

Se puede notar, finalmente, la dependencia de la segunda forma fundamental con la orientación de las superficies.

Proposition 9.12. *Sea $\mathcal{L}_p$ la segunda forma fundamental de S en p, considerando una orientación $\hat{N}_p$ de S en p. Entonces, la segunda forma fundamental de S en p, considerando la orientación $-\hat{N}_p$ es $-\mathcal{L}_p$.*

Demostración: Si $\mathcal{L}'_p$ es la segunda forma fundamental de S en p, con la orientación $-\hat{N}$, $\mathbf{X}$ es un vector tangente unitario de $\mathcal{T}_pS$ y α la sección normal de S definida por $\mathbf{X}$, por la interpretación geométrica de la segunda forma, tendremos

$$\mathcal{L}'_p(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \langle \alpha''(0), -\hat{N}\rangle = -\mathcal{L}_p(\mathbf{X},\mathbf{X}) \tag{244}$$

De modo que sigue lo que queríamos probar.

10. Las curvaturas de una superficie en $\mathbb{R}^3$.

En este tema vamos a introducir distintas curvaturas de una superficie en $\mathbb{R}^3$. En particular, reencontraremos la curvatura de Gauss, que ya introdujimos para superficies en $\mathbb{R}^n$, pero ahora obtendremos expresiones de esta curvatura mucho más accesibles.

10.1. Repaso de formas bilineales simétricas y endomorfismos simétricos. Antes de continuar estudiando la segunda forma fundamental, recordaremos la relación (estudiada en Álgebra Lineal) entre formas bilineales simétricas y endomorfismos simétricos, que luego usaremos.

Sea E un espacio vectorial euclídeo con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Recordemos que un endomorfismo $\mathcal{A}$ de E se dice que es simétrico si

$$\langle \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}\rangle \tag{245}$$

y que una forma bilineal $\mathcal{B}$ de E se dice que es simétrica si

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \tag{246}$$

Es inmediato que si $\mathcal{A}$ es un endomorfismo simétrico de E, la forma bilineal definida por $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \langle \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$, $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E$, es simétrica.

Menos obvio es el recíproco.

Proposition 10.1. *Si $\mathcal{B}$ es una forma bilineal simétrica sobre E, existe un único endomorfismo simétrico $\mathcal{A}$ de E tal que*

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}\rangle \quad \forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E \tag{247}$$

Demostración. Probemos la unicidad: si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ verifican la ecuación anterior, restando tendremos que

$$\langle \boldsymbol{x}, (\mathcal{A}-\mathcal{A}')\boldsymbol{y}\rangle = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E \tag{248}$$

Por tanto, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Para probar la existencia, podemos tomar bases y resolver la ecuación matricial. Es decir, fijamos una base de E y notamos Σ la matriz de $\mathcal{B}$, G la matriz del producto escalar y M la matriz del endomorfismo que buscamos. Entonces, se deberá verificar

$$\Sigma = GM \tag{249}$$

Por tanto, como $\det G \neq 0$, podremos resolver la ecuación y obtendremos

$$M = G^{-1}\Sigma \tag{250}$$

Este endomorfismo M es simétrico, pusto que, dado que $\Sigma^T = \Sigma$, M verifica

$$M^TG = GM \tag{251}$$

que es la ecuación matricial que caracteria los endomorfismos simétricos.

Aplicando el teorema espectral de diagonalización de endomorfismos simétricos se tiene inmediatamente:

Corollary 10.2. *Sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal simétrica sobre E. Existe una base ortogonal $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ de E tal que la matriz Σ de $\mathcal{B}$ en esta base es diagonal:*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \tag{252}$$

Esta matriz Σ es también la matriz diagonal del endomorfismo simétrico $\mathcal{A}$ asociado a $\mathcal{B}$. Por tanto, esta matriz es única salvo permutaciones de la diagonal.

En este punto debemos hacer una observación sobre la diferencia entre la forma bilineal $\mathcal{B}$ y el endomorfismo $\mathcal{A}$. Mientras que el determinante y la traza de cualquier matriz $\mathcal{A}$ son invariantes por cambios de base, no ocurre así con el determinante y la traza de las matrices de $\mathcal{B}$. Dejamos como ejercicio razonar este punto.

10.2. Curvaturas principales y direcciones principales de curvatura. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, sea p un punto de S, y sea $\hat{N}$ una orientación de S en p, fijada.

Como el espacio tangente $\mathcal{T}_pS$ es un espacio vectorial euclídeo (con producto escalar I_p), y $\mathcal{L}_p$ es una forma bilineal simétrica sobre $\mathcal{T}_pS$, resulta inmediatamente del repaso anterior que

Theorem 10.3. *Existe una base ortogonal $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ de $\mathcal{T}_pS$ tal que la matriz de $\mathcal{L}_p$ en esta base es diagonal:*

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \tag{253}$$

*Además, esta matriz es única salvo permutaciones de la diagonal. A los elementos de la diagonal k_1, k_2, se les llama **curvaturas principales** de S en p, y a los vectores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ se les llama las **direcciones principales de curvatura** de S en p.*

Corollary 10.4. ***Fórmula de Euler.*** *Con las notaciones anteriores, si*

$$\mathbf{X} = \cos\theta \boldsymbol{u}_1 + \sin\theta \boldsymbol{u}_2 \tag{254}$$

la curvatura de la sección normal de S definida por $\mathbf{X}$ es

$$k(\mathbf{X}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \tag{255}$$

Resulta de aquí, que si ponemos $k_2 \leq k_1$, entonces

$$k_2 \leq k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \leq k_1 \tag{256}$$

Es decir, que k_1 es la curvatura seccional máxima de S, y k_2 es la mínima.

Damos ahora la definición siguiente.

Definition 10.5. *Se llama **curvatura de Gauss** (o gaussiana) de S en p a*

$$K_p = k_1 k_2 \tag{257}$$

*y se llama **curvatura media** de S en p a*

$$H_p = (k_1 + k_2)/2 \tag{258}$$

La presencia de las curvaturas principales k_1 y k_2, permite refinar la clasificación de los puntos de una superficie que habíamos dado, en función de la curvatura de Gauss.

Definition 10.6. *Un punto p de la superficie S se dice que es*

- ***umbilical**, si $k_1(p) = k_2(p)$*
- ***plano**, si $k_1(p) = k_2(p) = 0$*

Finalmente, se dice que una superficie es minimal si $k_1(p) = -k_2(p), \forall p \in S$, es decir, si la curvatura media H_p es nula.

Es claro que todos los puntos planos son parabólicos ($K = 0$), y que los puntos umbilicales no planos son elípticos ($K > 0$).

También es claro que un punto es umbilical si, y sólo si, la segunda forma es proporcional a la primera:

$$\mathcal{II}_p = k_1(p)\mathcal{I}_p \tag{259}$$

y, en particular, un punto es plano si, y sólo si, $\mathcal{II}_p = 0$.

Finalmente, observemos que un punto es umbilical si, y sólo si, todas las direcciones del espacio tangente son direcciones principales de la curvatura, o dicho de otra manera, un punto no es umbilical si, y sólo si, sólo tiene dos direcciones principales de curvatura linealmente independientes.

Los anteriores conceptos de curvatura conducen a resultados muy notables sobre las superficies de $\mathbb{R}^3$, algunos de los cuales veremos en los problemas de este tema.

10.3. El teorema egregio de Gauss. En el punto anterior hemos definido la curvatura de Gauss de una superficie en $\mathbb{R}^3$ por $K = k_1 k_2$, pero en la segunda parte del curso, ya habíamos dado una definición de la curvatura gaussiana para toda superficie en $\mathbb{R}^n$. ¿Coincide aquella definición con la que acabamos de dar?

Como es de esperar, sí que coinciden las dos definiciones:

Theorem 10.7. ***(Fórmula de Brioschi, 1852).*** *Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, sea p un punto de S, y sea $\hat{N}$ una orientación de S en p, fijada. Entonces se tiene*

$$k_1 k_2 = (D_2 - D_1)/D^2 \tag{260}$$

siendo D, D_1 y D_2 las expresiones que introdujimos en el tema 8.

Demostración. La prueba de este resultado nos requeriría unos cálculos un tanto laboriosos y no la incluiremos en estas notas.

Una consecuencia de este resultado es el siguiente teorema, que marcaría un hito en el desarrollo de la geometría.

Theorem 10.8. ***(egregio de Gauss, 1827).*** *El producto de las dos curvaturas principales sólo depende de la primera forma fundamental.*

Por tanto,

Corollary 10.9. *Si dos parametrizaciones birregulares $\varphi, \Psi : U \to \mathbb{R}^3$ tienen la misma primera forma fundamental, entonces tienen la misma curvatura de Gauss.*

Las fechas de los dos teoremas anteriores pone en evidencia que el desarrollo histórico de estos temas no es el que hemos seguido en este curso. Esto es bastante frecuente en las presentaciones actuales de las matemáticas, en las que prima la celeridad.

La expresión de la curvatura de Gauss como producto de dos curvaturas principales, $K_p = k_1 k_2$, nos permite dar una interpretación muy visual de los puntos elípticos o hiperbólicos.

- En un punto elíptico, como $K > 0$, las dos curvaturas principales son del mismo signo, y por tanto los dos vectores normales a las secciones normales según las direcciones principales, coinciden.
- En un punto hiperbólico, como $K < 0$, las dos curvaturas principales son de signo opuesto, y por tanto los dos vectores normales a las secciones normales según las direcciones principales, son opuestas.

10.4. El endomorfismo de Weingarten. Vamos a ver a continuación como podemos determinar las curvaturas con las dos formas fundamentales.

Hemos recordado al principio de este tema que en un espacio euclídeo E toda forma bilineal simétrica $\mathcal{B}$ define un endomorfismo simétrico de E tal que

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y} \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E \tag{261}$$

Así, aplicando este resultado al espacio euclídeo $\mathcal{T}_p S$, obtenemos que

Theorem 10.10. *La segunda forma fundamental $\mathcal{L}_p$ define un único endomorfismo simétrico $\mathcal{W}$ de $\mathcal{T}_p S$, tal que*

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = I_p(\mathbf{X}, \mathcal{W}_p(\mathbf{Y})) \tag{262}$$

Al endomorfismo $\mathcal{W}_p$ se le llama ***endomorfismo de Weingarten****.*

Una precaución: en algunas referencias se llama endomorfismo de Weingarten a $-\mathcal{W}_p$, veremos una motivación para este cambio de signo en el apartado 4.

Si $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, es una parametrización birregular de S, la igualdad $\mathcal{L}_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = I_p(\mathbf{X}, \mathcal{W}_p(\mathbf{Y}))$ se expresa, al tomar la base del espacio tangente $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, por la igualdad matricial

$$\mathcal{II}_{(u,v)} = \mathcal{I}_{(u,v)} \mathcal{W}_{(u,v)} \tag{263}$$

y, por tanto, es natural dar la siguiente definición.

Definition 10.11. *Se llama* ***matriz de Weingarten*** *de la parametrización regular* $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$*, a la aplicación*

$$\mathcal{W} : U \to M(2 \times 2; \mathbb{R}) \tag{264}$$

definida por el producto de matrices

$$\mathcal{W}_{(u,v)} = \mathcal{I}^{-1}_{(u,v)} \mathcal{II}_{(u,v)} \tag{265}$$

En definitiva, vemos que la definición de la matriz de Weingarten es análoga a la definición de la curvatura orientada

$$k(u) = \langle \alpha''(u), \hat{N} \rangle / ||\alpha'(u)||^2 \tag{266}$$

pues

- El papel del escalar $\langle \alpha''(u), \hat{N} \rangle$ lo desempeña ahora la matriz $\mathcal{II}_{(u,v)}$.
- El papel del escalar $1/||\alpha'(u)||^2$ lo desempeña la matriz $\mathcal{I}^{-1}_{(u,v)}$.

Observemos que un cambio de orientación de la superficie S cambia el signo de $\mathcal{II}$, pero no el de $\mathcal{I}$, por lo que también cambia el signo de $\mathcal{W}$.

Sabemos que la forma diagonal de $\mathcal{W}$ es la misma que la de $\mathcal{L}$, de manera que los valores propios k_1, k_2 de $\mathcal{W}$ son las curvaturas principales, y los vectores propios de $\mathcal{W}$ son las direcciones principales de curvatura.

De las propiedades de invarianza del determinante y la traza resulta la siguiente proposición, que nos da una forma de obtener la curvatura de Gauss y las otras curvaturas, a partir de $\mathcal{W}$.

Proposition 10.12. *Se tiene:*

1. $K_p = \det \mathcal{W}_p$
2. $H_p = \frac{1}{2} \text{traza}\, \mathcal{W}_p$
3. *El polinomio característico de* $\mathcal{W}_p$ *es* $t^2 - 2H_p t + K_p = 0$*, y por tanto las curvaturas principales son las raíces de esta ecuación:*

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \tag{267}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \tag{268}$$

Ahora resulta de un sencillo cálculo que

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix} \tag{269}$$

y así se obtiene el importante teorema siguiente.

Theorem 10.13. *La curvatura de Gauss de* S *en* p *verifica*

$$K_p = \frac{\det \mathcal{II}_p}{\det \mathcal{I}_p} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{270}$$

y la curvatura media

$$H_p = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \tag{271}$$

Vemos que todos los puntos de la esfera son umbilicales, pero no planos, y nos podemos preguntar si el recíproco es cierto:

Si S es una superficie regular, orientada y conexa, y suponemos que todos los puntos de S son umbilicales, pero no planos, entonces ¿Está S contenida en una esfera? Daremos la respuesta en el problema (10.6)

10.5. La diferencial de $\hat{N}$. Como el vector normal $\hat{N}$ es unitario, se tiene que $\langle \hat{N}, \hat{N} \rangle = 1$, y derivando se obtiene

$$\langle \hat{N}_u, \hat{N} \rangle = \langle \hat{N}_v, \hat{N} \rangle = 0 \tag{272}$$

Así, los vectores $\hat{N}_u$ y $\hat{N}_v$, que son las columnas de la diferencial de $\hat{N}$, se expresan como

$$\hat{N}_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \tag{273}$$

$$\hat{N}_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \tag{274}$$

y obtenemos una matriz a_{ij} formada por las componentes de los vectores $\hat{N}_u$ y $\hat{N}_v$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Vemos la relación entre esta matriz y la matriz de Weingarten.

Dado que $\langle \varphi_u, \hat{N} \rangle = 0$, derivando se obtiene

$$0 = \partial_u \langle \varphi_u, \hat{N} \rangle = \langle \varphi_{uu}, \hat{N} \rangle + \langle \varphi_u, \hat{N}_u \rangle = e + \langle \varphi_u, \hat{N}_u \rangle \tag{275}$$

$$0 = \partial_v \langle \varphi_u, \hat{N} \rangle = \langle \varphi_{uv}, \hat{N} \rangle + \langle \varphi_u, \hat{N}_v \rangle = f + \langle \varphi_u, \hat{N}_v \rangle \tag{276}$$

Análogamente, como $\langle \varphi_v, \hat{N} \rangle = 0$, se obtiene

$$0 = \partial_u \langle \varphi_v, \hat{N} \rangle = \langle \varphi_{vu}, \hat{N} \rangle + \langle \varphi_u, \hat{N}_v \rangle = f + \langle \varphi_v, \hat{N}_u \rangle \tag{277}$$

$$0 = \partial_v \langle \varphi_v, \hat{N} \rangle = \langle \varphi_{vv}, \hat{N} \rangle + \langle \varphi_v, \hat{N}_v \rangle = g + \langle \varphi_v, \hat{N}_v \rangle \tag{278}$$

Sustituyendo en estas cuatro igualdades las expresiones (10.29) y (10.30), encontramos

$$a_{11}E + a_{21}F = -e \tag{279}$$

$$a_{11}F + a_{21}G = -f \tag{280}$$

$$a_{12}E + a_{22}F = -f \tag{281}$$

$$a_{12}F + a_{22}G = -g \tag{282}$$

Estas igualdades se pueden expresar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tag{283}$$

y, en definitiva, obtenemos que la matriz a_{ij} es la opuesta de la matriz de Weingarten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\mathcal{W}_{(u,v)} \tag{284}$$

11. Curvas notables de una superficie en $\mathbb{R}^3$.

La geometría de una superficie S en $\mathbb{R}^3$ da lugar a distintos tipos de curvas sobre S, que particularizan ciertos aspectos de esta geometría. En este tema veremos los tres tipos más notables de curvas: las líneas de curvatura, las curvas asintóticas y las geodésicas.

En todo este capítulo S es una superficie en $\mathbb{R}^3$, regular y orientada.

Diremos que una curvas $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una *curva de S* si su traza está contenida en S, y pondremos entonces $\gamma : I \to S$.

11.1. Las líneas de curvatura. En el capítulo anterior hemos visto que $\forall p \in S$, existe una base ortogonal $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ de $\mathcal{T}_pS$ tal que la matriz de $\mathcal{L}_p$ en esta base es diagonal:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

y que a los vectores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ les hemos llamado *direcciones principales de curvatura* de S en p.

También se llama *dirección principal de curvatura* al subespacio $\langle \{\boldsymbol{x}\} \rangle$ que genera un vector $\boldsymbol{x}$ que sea una dirección principal de curvatura.

Podemos dar ahora la siguiente definición:

Definition 11.1. *Sea $\gamma : I \to S$ una curva regular de S. Se dice que γ es una **línea de curvatura** de S si $\forall t \in I$, el vector tangente $\gamma'(t)$ es una dirección principal de curvatura de S.*

Example 11.2. *Sobre el plano, o sobre la esfera, este concepto no es muy relevante, pues, en estos casos, como todas las direcciones son direcciones principales de curvatura, resulta que todas las curvas de estas superficies son líneas de curvatura. Pero, como veremos, en otras superficies este concepto es muy interesante.*

Como las direcciones principales de curvatura son los vectores propios del endomorfismo de Weingarten, se sigue inmediatamente la siguiente proposición.

Proposition 11.3. *Una curva regular de S, $\gamma : I \to S$, es una línea de curvatura de S si, y sólo si, existe una función diferenciable $\lambda : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{W}_{\gamma(t)}\gamma'(t) = \lambda(t)\gamma'(t), \quad \forall t \in I \tag{285}$$

Tomando una parametrización podremos expresar esta condición en forma de una ecuación diferencial ordinaria.

Sea $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización birregular de S, y sea $\gamma: I \to \varphi(U)$ una curva regular de S, cuya expresión local es $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$.

Theorem 11.4. *La curva γ es una línea de curvatura de S si, y sólo si, las funciones $u(t)$, $v(t)$ verifican la ecuación diferencial (EDO):*

$$(Ef - Fe)u'^2 + (Eg - Ge)u'v' + (Fg - Gf)v'^2 = 0 \tag{286}$$

Demostración. Como $\mathcal{W} = \mathcal{I}^{-1}\mathcal{II}$ tendremos la ecuación matricial:

$$\mathcal{II}(u', v') = \lambda \mathcal{I}(u', v') \tag{287}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \tag{288}$$

De aquí deducimos que

$$\frac{eu' + fv'}{Eu' + Fv'} = \frac{fu' + gv'}{Fu' + Gv'} \tag{289}$$

y operando se obtiene la ecuación enunciada en el teorema.

Corollary 11.5. *Si $F = f = 0$, las curvas coordenadas de la parametrización φ son las líneas de curvatura de S.*

Demostración. En efecto, consideremos las curvas cordenadas $u = \text{cte}, v = t$. Entonces $u' = 0$, y como $F = f = 0$, se cumple la ecuación anterior. Pasa algo similar con las curvas $u = t, v = \text{cte}$.

Corollary 11.6. *Si p es un punto no umbilical de S, pasan por p exactamente dos líneas de curvatura, que se cortan ortogonalmente en p.*

Demostración. La primera afirmación se deduce del teorema de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Las líneas de curvatura se cortan ortogonalmente ya que sus vectores tangentes en p son las direcciones principales de curvatura, y estas son ortogonales.

11.2. Las curvas asintóticas. Sabemos que tomando una base ortogonal $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ de $\mathcal{T}_pS$ formada por direcciones principales de curvatura, la matriz de la segunda forma fundamental $\mathcal{L}_p$ en esta base es diagonal y por tanto, si $\boldsymbol{x}$ tiene componentes (x, y) se tiene

$$\mathcal{II}_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = k_1x^2 + k_2y^2 \tag{290}$$

Definition 11.7. *Un vector $\boldsymbol{x} \neq 0$ de $\mathcal{T}_pS$ se dice que es una **dirección asintótica** si*

$$\mathcal{II}_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = k_1x^2 + k_2y^2 = 0 \tag{291}$$

También se llama dirección asintótica al subespacio $\langle\{\boldsymbol{x}\}\rangle$ que genera un tal $\boldsymbol{x}$.

Considerando la clasificación de los puntos de una superficie, tendremos:

1. Si p es un punto elíptico, como $K > 0$, k_1 y k_2 son no nulos y del mismo signo, de aquí resulta que $\mathcal{II}_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = k_1x^2 + k_2y^2 \neq 0$, y por tanto no hay direcciones asintóticas.
2. Si p es un punto parabólico no plano, entonces $\mathcal{II}_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = k_1x^2$, y por tanto sólo hay una dirección asintótica $\langle\{(0, 1)\}\rangle$.
3. Si p es un punto parabólico plano, entonces $\mathcal{II}_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, y por tanto todas las direcciones son asintóticas.
4. Si p es un punto hiperbólico, como $K < 0$, k_1 y k_2 son no nulas y de signo opuesto. Así, si suponemos que $k_2 < 0$, tendremos que

$$\mathcal{II}_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = k_1x^2 + k_2y^2 = (\sqrt{k_1}x + \sqrt{-k_2}y)(\sqrt{k_1}x - \sqrt{k_2}y) \tag{292}$$

y por tanto hay exactamente dos direcciones asintóticas $\langle\{(\sqrt{-k_2}, -\sqrt{k_1})\}\rangle$, $\langle\{(\sqrt{-k_2}, +\sqrt{k_1})\}\rangle$. Notemos que, en este caso, las direcciones asintóticas son ortogonales si, y sólo si,

$$k_1 + k_2 = 0 \tag{293}$$

es decir, si la superficie es minimal.

Podemos ahora dar la siguiente definición.

Definition 11.8. *Sea $\gamma : I \to S$ una curva regular de S. Se dice que γ es una curva asintótica de S si $\forall t \in I$, el vector tangente $\gamma'(t)$ es una dirección asintótica de S.*

Example 11.9. *Sobre el plano, o sobre la esfera, estas curvas son fáciles de determinar. En el plano, como todas las direcciones son direcciones asintóticas, resulta que todas las curvas del plano son curvas asintóticas. Mientras que sobre la esfera, como todos sus puntos son elípticos, no existen curvas asintóticas sobre la esfera.*

Tomando una parametrización podremos expresar la condición que define las curvas asintóticas en forma de una ecuación diferencial ordinaria.

Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización birregular de S, y sea $\gamma : I \to \varphi(U)$ una curva regular de S, cuya expresión local es $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$.

Theorem 11.10. *La curva $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es una curva asintótica de S si, y sólo si, las funciones $u(t)$ y $v(t)$ verifican la ecuación diferencial*

$$eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0 \tag{294}$$

Demostración. Como la matriz de $\mathcal{II}$ es

$$\mathcal{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tag{295}$$

el resultado es inmediato.

Corollary 11.11. *Si c es una constante y $e(u,c) = 0$ (resp. $g(c,v) = 0$), la curva coordenada $v = c$ (resp. $u = c$) de la parametización φ es una curva asintótica de S*

Demostración. En efecto, consideremos la curva coordenada $u = t, v = \text{cte}$. Entonces $v' = 0$ y como $e(u, \text{cte}) = 0$, se cumple la ecuación anterior. Para las curvas $u = \text{cte}, v = t$, es similar.

Corollary 11.12. *Si p es un punto hiperbólico de S, pasan por p exactamente dos curvas asintóticas.*

Demostración. Se deduce del teorema de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones ordinarias

11.3. Aceleración tangencial y símbolos de Christoffel. Antes de exponer las curvas geodésicas de una superficie, introduciremos unos conceptos previos que por sí mismos son muy importantes y esclarecedores.

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva (decribe un movimiento) en $\mathbb{R}^3$, recordemos que la *velocidad* de la curva γ en t es el vector de $\mathbb{R}^3$ $\gamma'(t)$, y se tiene, así, la curva diferenciable en $\mathbb{R}^3$

$$\gamma' : I \to \mathbb{R}^3, t \to \gamma'(t) \tag{296}$$

La *aceleración* de γ es la velocidad de la curva γ', es decir, la curva

$$\gamma'' : I \to \mathbb{R}^3, t \to \gamma''(t) \tag{297}$$

Supongamos ahora que S es una superficie orientada en $\mathbb{R}^3$, y que $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva sobre S, entonces la velocidad de la curva γ en t, el vector tangente de $\mathbb{R}^3$ $\gamma'(t)$, es una vector tangente a S, $\gamma'(t) \in \mathcal{T}_{\gamma(t)}S$.

Pero en general, la aceleración de γ en t, el vector $\gamma''(t)$, no será un vector tangente a S. Ahora bien, como S está orientada tendremos un vector normal unitario $\hat{N}_{\gamma(t)}$ para cada t, y podremos considerar la descomposición ortogonal

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{T}_{\gamma(t)}S \bigoplus \langle\{\hat{N}_{\gamma(t)}\}\rangle, \tag{298}$$

y de esta forma todo vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ se puede descomponer como

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_T + \boldsymbol{x}_N \tag{299}$$

con $\boldsymbol{x}_T \in \mathcal{T}_{\gamma(t)}S$ y $\boldsymbol{x}_N \in \langle\{\hat{N}_{\gamma(t)}\}\rangle$, que se llaman, respectivamente, la *componente tangencial* y la *componente normal* del vector $\boldsymbol{x}$.

Definition 11.13. *Se llama **aceleración tangencial** (con respeto a la superficie S) de la curva γ en t, a la componente en $\mathcal{T}_{\gamma(t)}S$ del vector $\gamma''(t)$, $\gamma''_T(t)$.*

Como el vector $\hat{N}_{\gamma(t)}$ es unitario y ortogonal a $\mathcal{T}_{\gamma(t)}S$, tendremos que

$$\gamma''(t) = \gamma''_T(t) + \langle \gamma''(t), \hat{N}_{\gamma(t)} \rangle \hat{N}_{\gamma(t)} \tag{300}$$

Veremos, a continuación, cómo se expresa la aceleración tangencial localmente.

Sea $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización birregular de S, y sea $\gamma :\ I \to \varphi(U)$ una curva regular de S, cuya expresión local es $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$.

Entonces, el espacio tangente tiene base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, y se tiene

$$\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v \tag{301}$$

Volviendo a derivar se tiene

$$\gamma'' = u''\varphi_u + v''\varphi_v + u'^2\varphi_{uu} + 2u'v'\varphi_{uv} + v'^2\varphi_{vv} \tag{302}$$

y, por tanto, para determinar la componente tangencial de γ'' necesitamos expresar las derivadas segundas de φ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v, \hat{N}\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Las primeras componentes no las conocemos y las notaremos Γ^k_{ij}, pero la componente en $\hat{N}$ sí que la conocemos, pues son los coeficientes de la segunda forma fundamental. Así, tendremos,

$$\varphi_{uu} = \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + e\hat{N} \tag{303}$$

$$\varphi_{uv} = \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + f\hat{N} \tag{304}$$

$$\varphi_{vv} = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + g\hat{N} \tag{305}$$

Nótese que no hemos escrito la ecuación correspondiente a φ_{vu}, pues $\varphi_{vu} = \varphi_{uv}$.

Definition 11.14. *Se llaman* ***símbolos de Christoffel*** *de la parametrización φ a los coeficientes Γ^k_{ij} de las ecuaciones anteriores.*

Evidentemente, la componente tangencial de las segundas derivadas está formada por los dos primeros términos de estas ecuaciones y, por tanto, al sustituir en la ecuación qu hemos obtenido para γ'' resulta el siguiente teorema.

Theorem 11.15. *La aceleración tangencial de la curva γ tiene, en la parametrización φ, la expresión*

$$\gamma''_T = (u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma_{22}v'^2)\varphi_u + (v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2)\varphi_v \tag{306}$$

Observemos que si las funciones coordenadas u, v las notamos u_1, u_2, entonces las derivadas parciales serían φ_{u_1}, φ_{u_2}, y podríamos escribir la anterior expresión de la aceleración tangencial así

$$\gamma''_T = \sum_{k=1,2} (u''_k + \sum_{i,j=1,2} \Gamma^k_{ij} u'_i u'_j)\varphi_{u_k} \tag{307}$$

Los coeficientes de Christoffel se pueden calcular derivando las igualdades $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ y $G = \langle \varphi_v \varphi_v \rangle$, y después de unos cálculos se pueden encontrar en los apuntes de F. Guillén, páginas 78-79, se llega a la proposición siguiente.

Proposition 11.16. *Los símbolos de Christoffel verifican*

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_u/2 & E_v/2 & F_v - G_u/2 \\ F_u - E_v/2 & G_u/2 & G_v/2 \end{pmatrix} \tag{308}$$

11.4. Las geodésicas. Imaginemos que tenemos sobre el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ una bolita de radio muy pequeño, fija en un punto P, y que le damos en el instante $t_0 = 0$, un golpe de una determinada dirección y magnitud, que estará representado por un vector $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$. La intuición geométrico-física más elemental nos hace prever que la bolita se moverá y seguirá una trayectoria rectilínea (en ausencia de rozamientos, fuerzas de gravedad,...,) será descrita por la ecuación de la recta

$$\gamma = P + t\boldsymbol{v} \tag{309}$$

es decir, la ecuación de la recta que pasa por P y que tiene vector director $\boldsymbol{v} \neq 0$. Es el movimiento (no constante) más simple que se estudia en cinemática y que se conoce como *movimiento rectilíneo uniforme* o MRU.

Pero, supongamos que la bolita no estuviera sobre un plano, sino que estuviera sobre una superficie S. La bolita está en el punto P de S y le damos un golpe representado por el vector tangente $\boldsymbol{v} \in \mathcal{T}_pS$. ¿Qué trayectoria seguirá, en este caso, la bolita? ¿Cuáles son los *movimientos rectilíneos uniformes* sobre una superficie S?

Vamos a estudiar esta cuestión.

La observación básica es la caracterización del MRU por medio de su aceleración. En efecto, es inmediato que $\gamma(t)$ es un MRU si, y sólo si, $\gamma''(t) = 0$, y que el punto de paso y el vector director quedan determinados por las condiciones iniciales $\gamma(0) = P$, $\gamma'(0) = \boldsymbol{v}$.

Por tanto, es natural dar la siguiente definición: un movimiento (o curva) $\gamma : I \to S$ sobre la superficie S, se dice que es un *movimiento uniforme sobre* S, si la aceleración tangencial de $\gamma_T''(t) = 0$. En esta definición hemos usado la terminología propia de la cinemática, pero en geometría diferencial se usa otra terminología y se dice que γ es una *geodésica* de S. Así pues,

Definition 11.17. *Una curva γ sobre una superficie S es una geodésica de S si $\gamma_T''(t) = 0$.*

Example 11.18. *Si $\gamma(t) = P + t\boldsymbol{v}$ es una recta cuya traza está contenida en S, entonces γ es una geodésica de S, pues como ya $\gamma'' = 0$, resulta que, claramente, $\gamma_T'' = 0$.*

Por ejemplo, hemos visto al estudiar las curvas asintóticas que en el paraboloide hiperbólico teníamos dos familias de rectas que eran curvas asintóticas de la superficie, pues bien todas estas rectas también serán geodésicas del paraboloide hiperbólico.

Vemos como se determinan las geodésicas de una superficie localmente.

Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización birregular de S, y sea $\gamma : I \to \varphi(U)$ una curva regular de S, cuya expresión local es $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$.

Anteriormente, hemos encontrado que la aceleración tangencial de la curva γ tiene, en la parametrización φ, la expresión

$$\gamma_T'' = (u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22} v'^2)\varphi_u + (v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2)\varphi_v$$

por tanto tenemos la siguiente caracterización:

Theorem 11.19. *La curva $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es una geodésica de S si, y sólo si, las funciones $u(t), v(t)$, verifican el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0 \tag{310}$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0 \tag{311}$$

Se sigue del teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales el siguiente corlario.

Corollary 11.20. *Si P es un punto de S y $\boldsymbol{v} \in \mathcal{T}_p S$, con $\boldsymbol{v} \neq 0$, existe un única geodésiva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$, tal que $\gamma(0) = P$, $\gamma'(0) = \boldsymbol{v}$.*

Es decir, en cualquier punto de la superficie S que pongamos la bolita y con cualquier golpe que le demos a la bolita, ésta se moverá en una trayectoria única sobre la superficie durante un cierto espacio de tiempo.

Corollary 11.21. *Las geodésicas de una superficie sólo dependen de la primera forma fundamental de la superficie, en particular, no dependen ni de la orientación de la superficie ni de la segunda forma fundamental.*

La definición anterior de geodésicas se aplica a curvas con una parametrización concreta, y por ello se les llama también *geodésicas parametrizadas*, para distinguirlas de las llamadas *geodésicas geométricas* que son aquellas curvas $\gamma(t)$ tales que con un cambio de parámetro se convierten en geodésicas parametrizadas. Así, el concepto de geodésica parametrizada no es invariante por cambios arbitrarios de parámetros, mientras que el concepto de geodésica geométrica sí lo es.

Una caracterización extrínseca de las geodésicas geométricas es la siguiente:

Proposition 11.22. *Sea $\gamma : I \to S$ una curva $2-$regular. Entonces, γ es una geodésica geométrica de S si, y sólo si, la normal $\boldsymbol{n}(t)$ a la curva γ es igual a $\pm\hat{N}_{\gamma(t)}$, para todo t, es decir, $\boldsymbol{n}(t) = \pm\hat{N}_{\gamma(t)}$.*

Demostración. Si γ es una geodésica geométrica, existe un cambio de parámetro que la convierte en geodésica parametrizada, y como los cambios de parámetro conservan el vector normal a la curva, podemos suponer que γ es una geodésica parametrizada. Entonces, será $\gamma_T'' = 0$ y por tanto

$$\gamma''(t) = \gamma_N''(t) = \langle \gamma''(t), \hat{N}_{\gamma(t)} \rangle \hat{N}_{\gamma(t)} \tag{312}$$

De aquí resulta, al ser γ 2−regular, que

$$\boldsymbol{n}(t) = \pm \hat{N}_{\gamma(t)} \tag{313}$$

Recíprocamente, si se cumple esta última condición, por una cambio de parámetro de γ seguirá cumpliéndose, y por tanto podemos suponer que γ está parametrizada por el arco. Entonces, como se tiene que

$$\gamma''(s) = \boldsymbol{t}'(s) = k(s)\boldsymbol{n}(s) \tag{314}$$

resultará de $\boldsymbol{n}(s) = \pm \hat{N}_{\gamma(s)}$, que

$$\gamma''(s) = \gamma''_N(s) \tag{315}$$

o sea que $\gamma''_T(s) = 0$, y, en definitiva, que γ es una geodésica geométrica.

12. Geometría intrínseca y geometría extrínseca de superficies.

En los temas anteriores hemos estudiado ciertas superficies distinguidas: el plano, el cilindro, la esfera, el toro ordinario, el toro plano, la catenoide, la helicoide... Nos podemos plantear la cuestión de si estas distintas superficies son realmente 'distintas' o son 'iguales'. Para ello, necesitamos precisar qué entendemos por 'igualdad' de superficies.

En Álgebra Lineal, por ejemplo, la 'igualdad' de espacios vectoriales se precisa con el concepto de isomorfismo lineal, mientras que en Geometría Lineal la 'igualdad' de espacios afines euclídeos se precisa con el concepto de isometría. Recordemos, en particular, que una isometría de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo se llama un *desplazamiento*, y que se puede expresar matricialmente: una aplicación f es un desplazamiento de $\mathbb{R}^3$ si, y sólo si, $f(x) = A(x) + b$, siendo A una matriz 3×3 ortogonal y b un vector de $\mathbb{R}^3$.

12.1. Superficies extrínsicamente isométricas. En primer lugar, tenemos que advertir que en el estudio de las superficies en $\mathbb{R}^3$ podemos distinguir dos tipos de ïgualdades", según se vean las superficies iguales exteriormente desde el espacio $\mathbb{R}^3$ en el que habitan, o si sólo se ve iguales interiormente, desde la propia superficie.

El primer concepto de ïgualdad"se precisa en la siguiente definición.

Definition 12.1. *Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares de $\mathbb{R}^3$, sea p_1 un punto de S_1 y p_2 un punto de S_2.*

*Diremos que S_1 y S_2 son **extrínsecamente isométricas en** p_1, p_2, si existe un desplazamiento f de $\mathbb{R}^3$, y entornos abiertos U_i de p_i en S_i, con $i = 1, 2$, tales que*

$$f(U_1) = U_2, \quad f(p_1) = p_2 \tag{316}$$

*En sentido contrario, diremos que S_1 y S_2 **no son extrínsecamente isométricas** si no son extrínsecamente isométricas en ningún par de puntos p_1, p_2.*

En muchos casos, los entornos U_i son las propias superficies, y se tiene claramente la proposición siguiente.

Proposition 12.2. *Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares de $\mathbb{R}^3$, y sea p_i un punto de S_i, con $i = 1, 2$. Si existe un desplazamiento f de $\mathbb{R}^3$ tal que*

$$f(S_1) = S_2, \quad f(p_1) = p_2 \tag{317}$$

entonces S_1 y S_2 son extrínsecamente isométricas en p_1, p_2.

Proposition 12.3. *Si S_1 y S_2 son extrínsecamente isométricas en p_1, p_2, entonces existe, para $i = 1, 2$, una parametrización birregular $\varphi_i : U \to \mathbb{R}^3$ de S_i, un punto q de U, tal que*

$$\varphi_i(q) = p_i, \ i = 1, 2 \tag{318}$$

y, si notamos $\mathcal{I}_{i,(u,v)}$ (respectivamente $\mathcal{II}_{i,(u,v)}$) la primera (y segunda) forma fundamental de φ_i, se tiene que

$$\mathcal{I}_{1,(u,v)} = \mathcal{I}_{2,(u,v)} \tag{319}$$

$$\mathcal{II}_{1,(u,v)} = \pm \mathcal{II}_{2,(u,v)}, \quad \forall\, (u, v) \in U \tag{320}$$

En consecuencia, si notamos K_i (respectivamente H_i) la curvatura de Gauss (y la curvatura media respectivamente) de φ_i, se tiene que

$$K_{1,(u,v)} = K_{2,(u,v)} \tag{321}$$

$$H_{1,(u,v)} = \pm H_{2,(u,v)}, \quad \forall\ (u,v) \in U \tag{322}$$

Demostración. En primer lugar, tomemos una parametrización birregular arbitraria de S_1 en un entorno de p_1, $\varphi:\ V \to \mathbb{R}^3$, con $\varphi(q) = p_1$.

Por hipótesis existe un desplazamiento f de $\mathbb{R}^3$, y entornos abiertos U_i de p_i en S_i, $i = 1,2$, tales que

$$f(U_1) = U_2, \quad f(p_1) = p_2 \tag{323}$$

Entonces podemos tomar $U = \varphi^{-1}(U_1)$, $\varphi_1:\ U \to \mathbb{R}^3$ la restricción de φ a U, y $\varphi_2:\ U \to \mathbb{R}^3$ la composición $f \circ \varphi_1$, así $\varphi_2 = f \circ \varphi_1$.

Notemos, ahora, que si el desplazamiento $f(x) = A(x) + b$, con A ortogonal, se verifica $\varphi_2(x) = A(\varphi_1(x)) + b$, y por tanto obtendremos al derivar:

$$\begin{aligned} \partial_u \varphi_2 &= A(\partial_u \varphi_1) \\ \partial_v \varphi_2 &= A(\partial_v \varphi_1) \\ \partial_{uu} \varphi_2 &= A(\partial_{uu} \varphi_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E_2 = \langle A(\partial_u \varphi_1), A(\partial_u \varphi_1) \rangle = E_1 \tag{324}$$

pues como A es ortogonal, preserva el producto escalar. Análogamente se prueba que $F_2 = F_1$, $G_2 = G_1$.

Finalmente,

$$e_2 = \frac{\det(A(\partial_{uu}\varphi_1), A(\partial_u \varphi_1), A(\partial_v \varphi_1))}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} = \det(A) e_1 = \pm e_1 \tag{325}$$

pues una matriz ortogonal tiene determinante ± 1. Análogamente se prueba que $\mathcal{II}_2 = \det(A)\mathcal{II}_1 = \pm \mathcal{II}_1$, según el signo de $\det A$.

Podemos preguntarnos si el recíproco de la proposición anterior es cierto, y, en efecto, este es el contenido del importante teorema de Bonnet.

Theorem 12.4. ***(de Bonnet.)*** *Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares de $\mathbb{R}^3$. Si existe, para $i = 1,2$, una parametrización birregular $\varphi_i:\ U \to \mathbb{R}^3$ de S_i, un punto q de U, tal que*

$$\varphi_i(q) = p_i,\ i = 1,2 \tag{326}$$

y se tiene que

$$\mathcal{I}_{1,(u,v)} = \mathcal{I}_{2,(u,v)} \tag{327}$$

$$\mathcal{II}_{1,(u,v)} = \pm \mathcal{II}_{2,(u,v)}, \quad \forall\ (u,v) \in U \tag{328}$$

entonces S_1 y S_2 son extrínsecamente isométricas en p_1, p_2.

Demostración. La prueba de este resultado se apoya en resultados de EDP's que quedan fuera del alcance de este curso.

12.2. Superficies intrínsecamente isométricas. El segundo concepto que daremos de ïgualdad"de superficies tiene su motivación en el "problema de los mapas".

Dada una superficie S_1 de $\mathbb{R}^3$,¿Qué es un mapa de S_1?.

Una respuesta razonable es que un mapa de S_1 es una región del plano (una hoja de papel) que se corresponde biyectivamente con S_1 (un dibujo de S_1 sobre la hoja de papel), tal que esta correspondencia conserva las distancias (o las conserva con un factor de escala).

En general, podríamos considerar mapas de S_1 sobre otras superficies que no fueran necesariamente el plano, digamos otra superficie S_2, y así llegamos al concepto de superficies intrínsecamente isométricas, que exponemos a continuación.

Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Tomando $n = \text{máx}(n,m)$, supondremos que ambas son superficies de $\mathbb{R}^n$ (consideraremos superficies en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, pues la restricción a superficies en $\mathbb{R}^3$ sería irrelevante en la definición que sigue).

Definition 12.5. *Diremos que S_1 y S_2 son* ***intrínsecamente isométricas en*** *p_1, p_2, si existe, para $i = 1, 2$, una parametrización birregular $\varphi_i : U \to \mathbb{R}^n$ de S_i, un punto q de U, tal que*

$$\varphi_i(q) = p_i, \quad i = 1, 2 \tag{329}$$

y las primeras formas fundamentales de φ_1 y φ_2 coinciden sobre U.

En sentido contrario, diremos que S_1 y S_2 ***no son intrínsecamente isométricas*** si no son intrínsecaemnte isométricas en ningún par de puntos p_1, p_2.

Notemos que, (como ya hemos dicho), en esta definición no hemos supuesto que las superficies estén necesariamente en $\mathbb{R}^3$, pues la primera forma fundamental la hemos definido para supericies en $\mathbb{R}^n$.

Resulta, inmediatamente, de la proposición anterior, el siguiente resultado.

Proposition 12.6. *Si S_1 y S_2 son dos superficies de $\mathbb{R}^3$, que son extrínsecamente isométricas en p_1, p_2, entonces son intrínsecamente isométricas en p_1, p_2.*

Pero tenemos superficies que son intrínsecamente isométricas y no lo son extrínsecamente, veamos un ejemplo sencillo.

La definición de superficies intrínsecamente isométricas se refiere a puntos concretos de las superficies, pero como acabamos de ver en el ejemplo del plano y el cilindro esta concreción no es necesaria en ocasiones, y en este sentido se da la siguiente definición.

Definition 12.7. *Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares de $\mathbb{R}^n$, diremos que S_1 y S_2 son* ***localmente isométricas****, si para cada punto p_1 de S_1 existe un punto p_2 de S_2 tal que S_1 y S_2 son* ***intrínsecamente isométricas en*** *p_1, p_2, y, recíprocamente, para cada punto q_2 de S_2 existe un punto q_1 de S_1 tal que S_1 y S_2 son* ***intrínsecamente isométricas en*** *q_1, q_2.*

Example 12.8. *Así, el plano y el cilindro son localmente isométricos.*

Recordamos que, por definición, la curvatura de Gauss se expresa en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas, y, por tanto, se sigue el teorema:

Theorem 12.9. ***(de Gauss.)*** *Si S_1 y S_2 son dos superficies de $\mathbb{R}^n$, que son intrínsecamente isométricas en p_1, p_2, entonces sus curvaturas de Gauss coinciden en esos puntos $K_1(p_1) = K_2(p_2)$, y existen entornos U_i de p_i, $i = 1, 2$, tales que, $\forall \boldsymbol{x} \in U_i$ existe $\boldsymbol{y} \in U_j$, con $i \neq j$, que verifica $K_1(\boldsymbol{x}) = K_2(\boldsymbol{y})$.*

Example 12.10. *ejemplos*

12.3. La catenoide y el helicoide. Un ejemplo clásico que ayuda a clarificar los conceptos introducidos es el de la catenoide y el helicoide.

Comencemos repasando la catenoide, que notaremos S_1.

En anteriores temas, hemos definido esta superficie como la superficie de revolución engendrada por una curva catenaria. Así, hemos visto que era la traza de la parametrización

$$\varphi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \tag{330}$$

Esta parametrización es birregular si la restringimos a cualquier abierto de la forma $(a-\pi, a+\pi) \times \mathbb{R}$ y por tanto, como estas parametrizaciones birregulares recubren la catenoide, concluimos que la catenoide es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

Para cualquiera de estas parametrizaciones birregulares, hemos encontrado que las matrices de las formas fundamentales son

$$\mathcal{I}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{II}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{331}$$

la curvatura de Gauss es

$$K = -1/\cosh^4 v \tag{332}$$

y la curvatura media es

$$H = 0 \tag{333}$$

Como la catenoide S_1 es una superficie de revolución con eje OZ, S_1 es invariante bajo rotaciones f de $\mathbb{R}^3$ que tienen ese eje. Así, si tomamos dos puntos p_1, p_2, de la catenoide con la misma componente z, la altura, existe una rotación f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(S_1) = S_2, f(p_1) = p_2$, y por tanto vemos que la catenoide es extrínsecamente isométrica consigo misma en los puntos $p_1 = (x_1, y_1, z)$ y $p_2 = (x_2, y_2, z)$.

Como también S_1 es invariante por la simetría especular con respecto al plano OXY, tendremos también que la catenoide es extrínsecamente isométrica consigo misma en $p_1 = (x_1, y_1, z)$ y $p_2 = (x_2, y_2, -z)$.

En cambio, si $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ con $z_2 \neq \pm z_1$, entonces al ser $v = z$, concluimos por las propiedades del cosh que $K(p_1) \neq K(p_2)$, y, por tanto, la catenoide no es (ni siquiera) intrínsecamente isométrica consigo misma en p_1, p_2.

Pasemos ahora a estudiar el helicoide recto, que notaremos S_2.

En temas anteriores hemos visto que el helicoide es la traza de la parametrización

$$\Psi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \tag{334}$$

que es birregular, de modo que el helicoide es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$. También hemos encontrado que las matrices de sus formas fundamentales son

$$\mathcal{I}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{II}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{1+v^2} \\ 1/\sqrt{1+v^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{335}$$

La curvatura de Gauss en este caso es

$$K_{(u,v)} = -\frac{1}{(1+v^2)^2} \tag{336}$$

y su curvatura media es

$$H = 0 \tag{337}$$

Podríamos estudiar en qué puntos p_1, p_2 el helicoide es extrínsecamente isométrico consigo mismo, y encontraríamos una respuesta similar a la que hemos hallado para la catenoide. Dejamos este ejercicio al lector.

Llegamos ahora a la cuestión más interesante. Queremos determinar si existen puntos p_1 de S_1 y p_2 de S_2 talques las superficies S_1 y S_2 son extrínsecamente, o intrínsecamente, isométricas en p_1, p_2.

En primer lugar vamos a probar que sí son intrínsecamente isométricas. Puesto que las parametrizaciones φ y Ψ iniciales que tenemos no tienen la misma primera forma fundamental, hemos de ver si podemos encontrar una reparametrización de una de ellas, por ejemplo de φ, que tenga como primera forma fundamental

$$\mathcal{I}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{338}$$

En efecto, si hacemos $v = \operatorname{arcsinh} w$, nos quedará la parametrización de S_1

$$\eta(u,w) = (\sqrt{1+w^2}\cos u, \sqrt{1+w^2}\sin u, \operatorname{arcsinh} w) \tag{339}$$

La reparametrización se ha hallado por prueba y error, no hay mucho misterio detrás. Podemos pues calcular la primera forma fundamental de la reparametrización. Para ello, primero las derivadas

$$\eta_u = (-\sqrt{1+w^2}\sin u, \sqrt{1+w^2}\cos u, 0) \tag{340}$$

$$\eta_w = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}(w\cos u, w\sin u, 1) \tag{341}$$

de donde resulta la primera forma fundamental

$$\mathcal{I}_{\eta,(u,w)} = \begin{pmatrix} 1+w^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{342}$$

que es la misma de S_2 salvo por el cambio de notación para la segunda variable. En definitiva, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, la catenoide S_1 y el helicoide S_2 son intrínsecamente isométricas en los puntos

$$p_1 = (\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, \operatorname{arcsinh} v)$$
$$p_2 = (v\cos u, v\sin u, u)$$

Por tanto, no podríamos hacer un mapa perfecto de la catenoide sobre un plano, pues su curvatura $K \neq 0$, pero sí que lo podríamos hacer sobre un helicoide recto.

Estudiemos ahora si son extrínsecamente isométricas.

Como ambas superficies tienen todos sus puntos hiperbólicos y la curvatura media de ambas es cero, no podemos extraer ninguna consecuencia definitiva a partir de estas curvaturas. El problema será más delicado.

Una primera posibilidad de isometría extrínseca que podríamos tener es que existiera un desplazamiento f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(S_1) = S_2$.

Veamos que esto no puede ser.

Probaremos esta imposibilidad analizando los subconjuntos $K_{\min}$ formados por los puntos de curvatura de Gauss mínimas de las superficies (se podría dar, también, una prueba observando que estas dos superficies no son homeomorfas, pero esta prueba requiere algunos resultados de topología que no son elementales).

A partir de las fórmulas que hemos encontrado para las curvaturas de Gauss, vemos que la curvatura mínima es $K = -1$ y tenemos para S_1

$$K_{\min,1} = \{p \in S_1, K(p) = -1\} = \{p = \varphi(u,0) \in S_1\} = \mathcal{S}^1 \times \{0\} \tag{343}$$

una circunferencia en el plano OXY, mientras que para S_2 tenemos

$$K_{\min,2} = \{p \in S_2, K(p) = -1\} = \{p = \Psi(u,0) \in S_2\} = \{(0,0)\} \times \mathbb{R} \tag{344}$$

o sea, la recta OZ.

Si existiera un desplazamiento f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(S_1) = S_2$, se tendría que $f(K_{\min,1}) = K_{\min,2}$, y f definiría un heomeomorfismo entre $K_{\min,1}$ y $K_{\min,2}$. Pero esto no puede ser porque la circunferencia es compacta y la recta no lo es.

Probaremos finalmente que no existen puntos p_1 de S_1 y p_2 de S_2 tales que S_1 y S_2 sean extrínsecamente isométricas en p_1 y p_2.

Usaremos un argumento basado en las curvas asintóticas (también podríamos usar las de curvatura). Recordemos que estas curvas son las curvas dadas localemente por $\xi(t) = (u(t), v(t))$ con $u(t)$ y $v(t)$ soluciones a la EDO

$$eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0 \tag{345}$$

Como ya conocemos los coeficientes e, f, g de las segundas formas fundamentales encontraremos que estas ecuaciones, una vez simplificadas, son

$$u'^2 - v'^2 = 0 \text{ para } S_1 \tag{346}$$

$$u'v' = 0 \text{ para } S_2 \tag{347}$$

Así pues las curvas asintóticas de la catenoide son las de expresión local

$$u = \pm v + c \tag{348}$$

y las del helicoide recto son las curvas coordenadas

$$u = a, \ v = t + c \tag{349}$$

y

$$u = t + c, \ v = b \tag{350}$$

con a, b, c constantes.

Resulta de aquí que las curvas asintóticas de la catenoide son las curvas

$$\alpha(t) = (\cosh t \cos(\pm t + c), \cosh t \sin(\pm t + c), t), \ t \in \mathbb{R} \tag{351}$$

mientras que las curvas asintóticas del helicoide recto son las rectas

$$\beta(t) = ((t + c)\cos a, (t + c)\sin a, a), \ t \in \mathbb{R} \tag{352}$$

y las hélices

$$\gamma(t) = (b\cos(t + c), b\sin(t + c), t + c), \ t \in \mathbb{R} \tag{353}$$

Veremos, ahora, que ninguna de las curvas α es una recta viendo que son $2-$regulares en todos sus puntos salvo uno, es decir que $\text{rang}(\alpha', \alpha'') = 2$ para todo $t \neq 0$ (recordemos que las rectas estan caracterizadas por ser $1-$regulares a lo sumo en todos sus puntos).

Calculamos

$$\alpha' = (\sinh t \cos(\pm t + c) - \pm \cosh t \sin(\pm t + c), \sinh t \sin(\pm t + c) \pm (\pm t + c), 1)$$
$$\alpha'' = \cdots = (-2 \pm \sinh t \sin(\pm t + c), \pm 2 \sinh t \cos(\pm t + c), 0)$$

y, en efecto, encontramos que

$$\text{rang}(\alpha', \alpha'') = 2, \quad \forall\, t \neq 0 \tag{354}$$

pues $\sinh t \neq 0 \;\forall\, t \neq 0$, y el seno y el coseno no se anulan simultáneamente.

De aquí deducimos que no existen puntos p_1 de S_1 y p_2 de S_2 tales que S_1 y S_2 sean extrínsecamente isométricas en p_1, p_2. Pues si existieran tales puntos, las curvas asintóticas de S_1 en p_1 se enviarían por el desplazamiento f sobre las curvas asintóticas de S_2 en p_2, y esto es imposible pues un desplazamiento transforma rectas en rectas, y ninguna de las curvas asintóticas de la catenoide es una recta.

Resumiendo: este ejemplo es muy interesante, pues a pesar de haber probado que S_1 y S_2 son intrínsecamente isométricas, y tener la misma curvatura media $H = 0$, hemos probado que estas superficies no son extrínsecamente isométricas, por un argumento en el estudio de las curvas asintóticas.

Hasta aquí todo, dejaremos aquí el estudio que hemos hecho a lo largo del curso sobre temas fundamentales y básicos de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies.

Email address: `ot.garces@ub.edu`
Email address: `adria.garces@ub.edu`

Condensed Matter Physics Department, Universitat de Barcelona, Martí i Franquès 1, E08028 Barcelona, Spain